Kompaktheitssatz (Endlichkeitssatz)

Erfüllbarkeit von unendlichen Formelmengen
hängt nur von je endlich vielen ab, i.d.S.d.:

Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ gilt:

Φ erfüllbar $\quad\Leftrightarrow\quad$ jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar $\quad(*)$

Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{AL}, \psi \in \mathrm{AL}$ gilt:

$\Phi \models \psi \quad\Leftrightarrow\quad \Phi_0 \models \psi$ für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi \quad(**)$

Bem.: Aussagen $(*)$ und $(**)$ sind äquivalent.

Konsequenz:
Unerfüllbarkeit einer unendlichen Formelmenge lässt sich durch ein endliches Zertifikat nachweisen. (Warum?)

Beweis des Kompaktheitssatzes

für $\Phi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$, $\mathcal{V} = \{p_i : i \geqslant 1\}$

Sei jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar.

Konstruiere induktiv $\mathfrak{I}_0, \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \ldots$ so, dass:

- $\mathfrak{I}_n$ eine $\mathcal{V}_n$-Interpretation.
- $\mathfrak{I}_{n+1}$ verträglich mit $\mathfrak{I}_n$: $\mathfrak{I}_{n+1}(p_i) = \mathfrak{I}_n(p_i)$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.
- alle endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar durch mit $\mathfrak{I}_n$ verträgliche $\mathfrak{I}$.

Dann ist $\mathfrak{I} \models \Phi$ für die Interpretation $\mathfrak{I} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{B}$, $p_n \longmapsto \mathfrak{I}_n(p_n)$

Wie kommt man von $\mathfrak{I}_n$ zu $\mathfrak{I}_{n+1}$?

Konsequenzen des Kompaktheitssatzes

vgl. auch Skript u. Aufgaben

Lemma von König

Ein endlich verzweigter Baum mit unendlich vielen Knoten muss einen unendlichen Pfad haben.

k-Färbbarkeit

Ein Graph ist genau dann k-färbbar, wenn jeder endliche Teilgraph k-färbbar ist.

Domino-Parkettierungen

Ein endliches Domino-System erlaubt genau dann eine Parkettierung der Ebene, wenn sich beliebig große endliche Quadrate parkettieren lassen.

Lemma von König aus AL-Kompaktheit

Betrachte $\mathcal{T} = (V, E, \lambda)$ Baum mit

- Wurzel λ und abzählbar unendlicher Knotenmenge V,
- endlich verzweigter Kantenrelation E:
  $E[u] = \{v \in V : (u, v) \in E\}$ endlich f.a. $u \in V$.
- Pfaden $\lambda \overset{E}{\to} \ldots \overset{E}{\to} u$ jeder endlichen Länge,
  da sonst V endlich.

Lemma von König aus AL-Kompaktheit, fortges.

Kodierung in AL($\mathcal{V}$) mit $\mathcal{V} := \{p_u \colon u \in V\}$:

$\varphi_u := p_u \to \bigvee\{p_v \colon v \in E[u]\}$
"wenn u gewählt wird,
dann auch mindestens ein direkter Nachfolger von u"

Für $\Phi := \{p_\lambda\} \cup \{\varphi_u \colon u \in V\}$ gilt:

- jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar, also auch Φ insgesamt.
- wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$, so existiert ein unendlicher Pfad
  $\lambda = u_0 \stackrel{E}{\to} u_1 \stackrel{E}{\to} u_2 \stackrel{E}{\to} \ldots$ mit $\mathfrak{I}(u_i) = 1$.

Bem.: mit $\varphi'_u := p_u \to$ "...genau ein direkter Nachfolger von u"
beschreibt jedes $\mathfrak{I} \models \Phi'$ *einen* unendlichen Pfad.

Logikkalküle: Deduktion und Refutation

Logikkalküle: rein syntaktische Formate für formale Beweise.

Formale Beweise: syntaktische Zeichenketten,
nach einfach nachprüfbaren syntaktischen Regeln aufgebaut
(Regelsystem: *Kalkül*).

Ableitung: Erzeugung von (regelkonformen) formalen Beweisen.

Korrektheit nur semantisch korrekte Sachverhalte sind formal beweisbar (ableitbar).

Vollständigkeit jeder semantisch korrekte Sachverhalt ist formal beweisbar (ableitbar).

Resolution: ein *Widerlegungskalkül* für die *Unerfüllbarkeit* von KNF-Formeln.

Sequenzenkalkül: ein *Deduktionskalkül* für Allgemeingültigkeit beliebiger AL-Formeln.