wesentliche Methode: Spiele, Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

vgl. Semantikspiel zwischen Verifizierer und Falsifizierer

Idee: Spielprotokoll für zwei Spieler **I** und **II**
zum Vergleich zweier Strukturen so, dass
$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ähnlich (ununterscheidbar in L)
wenn Spieler **II** Gewinnstrategie hat.

Spieler **II** muss in der jeweils anderen Struktur nachmachen,
was **I** in einer der Strukturen vorgibt

Spieler **I** versucht das Spiel auf Unterschiede zu lenken,
die das für **II** unmöglich machen

Verwendung

wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ununterscheidbar in L,
aber verschieden hinsichtlich Eigenschaft E,
dann lässt sich E *nicht* in L ausdrücken

das klassische Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel für FO

fixiere feste endliche relationale Signatur S

zB für Wortstrukturen zu Alphabet Σ: $S = \{<\} \cup \{P_a \colon a \in \Sigma\}$

Ununterscheidbarkeitsgrade $\mathcal{W}, \mathbf{m} \equiv_q \mathcal{W}', \mathbf{m}'$

f.a. $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathrm{FO}(S)$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant q$:
$\mathcal{W} \models \varphi[\mathbf{m}] \;\Leftrightarrow\; \mathcal{W}' \models \varphi[\mathbf{m}']$

insbesondere für $q = 0$, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, $\mathbf{m}' = (m'_1, \ldots, m'_k)$
$\mathcal{W}, \mathbf{m} \equiv_0 \mathcal{W}', \mathbf{m}'$ gdw. $\rho : (m_i \mapsto m'_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ lokaler Isomorphismus

Spielidee: **I** markiert zukzessive Elemente in $\mathcal{W}$ oder $\mathcal{W}'$,
II antwortet in der jeweils anderen Struktur,
II muss $\mathcal{W}, \mathbf{m} \equiv_0 \mathcal{W}', \mathbf{m}'$ gewährleisten

die Spiele $G^q(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ und $G^q(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')$

Konfigurationen:
$(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')$ mit $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ und $\mathbf{m}' = (m'_1, \ldots, m'_k)$
wenn in $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}'$ jeweils k Elemente markiert sind

Zugabtausch in einer Runde:
I markiert in $\mathcal{W}$ oder in $\mathcal{W}'$ ein weiteres Element,
II ein Element in der jeweils anderen Struktur

von
$(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')$
zu Nachfolgekonfiguration
$(\mathcal{W}, \mathbf{m}, m_{k+1}; \mathcal{W}', \mathbf{m}', m'_{k+1})$

Gewinnbedingung:
II verliert wenn $\mathcal{W}, \mathbf{m} \not\equiv_0 \mathcal{W}', \mathbf{m}'$

$\boldsymbol{G^q(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')}$:
Spiel über q Runden mit Startkonfiguration $(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')$

Ehrenfeucht-Fraïssé Satz

für alle $q \in \mathbb{N}$, S-Strukturen $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}'$ mit Parametern
$\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ in $\mathcal{W}$ und $\mathbf{m}' = (m'_1, \ldots, m'_k)$ in $\mathcal{W}'$
sind äquivalent:

(i) **II** hat Gewinnstrategie in $G^q(\mathcal{W}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{m}')$

(ii) $\mathcal{W}, \mathbf{m} \equiv_q \mathcal{W}', \mathbf{m}'$

Beweis per Induktion über q. Strategieanalyse!

$q = 0$: trivial.

Gewinnstrategie für eine Runde verlangt gerade
Übereinstimmung hinsichtlich Existenzbeispielen für z
in allen Formeln $\exists z \varphi(\mathbf{x}, z)$ mit quantorenfreiem φ (warum?)

Gewinnstrategie für $q + 1$ Runden verlangt analog,
in der ersten Runde, Übereinstimmung hinsichtlich
aller Formeln $\exists z \varphi(\mathbf{x}, z)$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant q$

Bsp: Spiele über Wortstrukturen und linearen Ordnungen

(A) Gewinnstrategien für **II** sind verträglich mit Konkatenation

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{V},\mathbf{m} \equiv_q \mathcal{V}',\mathbf{m}' \\ \mathcal{W},\mathbf{n} \equiv_q \mathcal{W}',\mathbf{n}'\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}\oplus\mathcal{W},\mathbf{m},\mathbf{n} \equiv_q \mathcal{V}'\oplus\mathcal{W}',\mathbf{m}',\mathbf{n}'$$

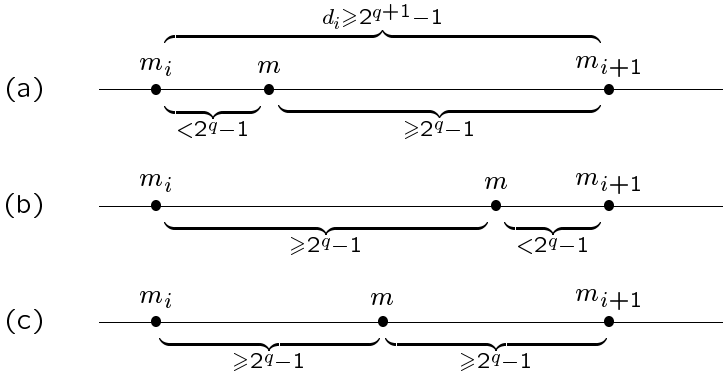
(Beobachtung 8.11)

(B) in (nackten) linearen Ordnungen sind Distanzen ab 2^q mit Quantorenrang q ununterscheidbar

diese Schranke ist i.w. scharf (Beobachtung 8.12)

Strategiefindung: Auszug

wie **II** auf Herausforderungszug von **I** auf $m \in (m_i, m_{i+1})$ antworten kann (3 Fälle)



Strategien über nackten endlichen Ordnungen

vergleiche aufsteigende Tupel
$\mathbf{m} = (m_1,\ldots,m_k)$ in $\mathcal{O}_n = (\{1,\ldots,n\},<)$ und
$\mathbf{m}' = (m'_1,\ldots,m'_k)$ in $\mathcal{O}_{n'} = (\{1,\ldots,n'\},<)$

Intervallgrößen:

i-ter Abschnitt: $m_i < x < m_{i+1}$ hat $d_i := m_{i+1} - m_i - 1$ Elemente

kritische Intervallgröße (für q weitere Runden): $2^q - 1$

$d \stackrel{q}{=} d' \;:\Leftrightarrow\; d = d'$ oder $d, d' \geqslant 2^q - 1$

dann gilt:

$$\mathcal{O}_n, \mathbf{m} \equiv_q \mathcal{O}_{n'}, \mathbf{m}' \quad \text{gdw.} \quad d_i \stackrel{q}{=} d'_i \text{ für } i = 0,\ldots,k$$

Folgerungen

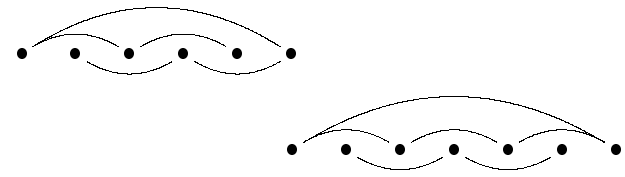
(1) **(un)gerade Länge endlicher linearer Ordnungen nicht in FO definierbar**

vergleiche Ordnungen der Längen $2^q - 1$ und 2^q:
Quantorenrang q reicht nicht aus

(2) **Zusammenhang endlicher Graphen nicht in FO definierbar**

logische Übersetzung (Interpretation) liefert Reduktion auf (1)

vergleiche zB



Variationen: andere Logiken — andere Spiele

am Beispiel zweier wichtiger (Familien von) Logiken in der Informatik

- **MSO, monadische Logik zweiter Stufe**
  Erweiterung von FO: Quantoren über Teilmengen
  $\rightarrow$ formale Sprachen, concurrency
- **ML, Modallogik**
  Fragment von FO: beschränkte Quantoren über Elemente
  $\rightarrow$ temporale Spezifikation, Wissensrepräsentation

hier: zugehörige Spiele und Beispiele für ihren Nutzen

MSO: monadische zweite Stufe

hier über Σ-Wortstrukturen, zu $S = \{<\} \cup \{P_a \colon a \in \Sigma\}$

Elementvariable: $x_1, x_2, \ldots$

Mengenvariable: $X_1, X_2, \ldots$ für Teilmengen der Trägermenge

zu Syntax und Semantik von MSO(S)

atomare Formeln: $x_i = x_j$, $x_i < x_j$, $P_a x_i$, $X_i x_j$
AL Junktoren $\wedge, \vee, \neg$ wie üblich
Quantifizierung über Elemente: $\forall x_i \varphi$, $\exists x_i \varphi$ wie in FO
Quantifizierung über Teilmengen: $\forall X_i \varphi$, $\exists X_i \varphi$

Beispiele: Ordnungen/Wörter ungerader Länge
allgemeiner: reguläre Sprachen
MSO-Kodierung von DFA/NFA

MSO-Spiel

Konfigurationen $(\mathcal{W}, \mathbf{Q}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{Q}', \mathbf{m}')$
mit markierten Elementen $\mathbf{m}/\mathbf{m}'$ und Teilmengen $\mathbf{Q}/\mathbf{Q}'$

zwei Zugvarianten { weiteres Elementepaar markieren; weiteres Teilmengenpaar markieren

Ehrenfeucht-Fraïssé Satz für MSO:

II hat Gewinnstrategie in $G^q_{\mathsf{MSO}}(\mathcal{W}, \mathbf{Q}, \mathbf{m}; \mathcal{W}', \mathbf{Q}', \mathbf{m}')$
gdw. $\mathcal{W}, \mathbf{Q}, \mathbf{m} \equiv^{\mathsf{MSO}}_q \mathcal{W}', \mathbf{Q}', \mathbf{m}'$

auch im MSO-Spiel sind Gewinnstrategien
verträglich mit Konkatenation

daraus: **Satz von Büchi**

MSO-definierbare Eigenschaften von Σ-Wortstrukturen
entsprechen genau den regulären Σ-Sprachen

ML: Modallogik

hier über Σ-Transitionssystemen,
zu $S = \{E_a \colon a \in \Sigma\} \cup \{P_i \colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$

Formeln von ML(S) sprechen über einzelne Zustände in
Σ-Transitionssystemen mit atomaren
Zustandseigenschaften $p_i \leftrightsquigarrow P_i$

Syntax von ML(S)

atomare Formeln: $\bot$, $\top$, p_i (wie AL_n)
AL Junktoren $\wedge, \vee, \neg$ wie üblich
modale Quantifizierung: $\Box_a \varphi$, $\Diamond_a \varphi$ für jedes $a \in \Sigma$

Semantik von ML(S) als Fragment von FO(S):

$$\Box_a \varphi(x) \equiv \forall y\Big(E_a xy \to \varphi(y)\Big) : \quad \forall y\Big((x \xrightarrow{a} y) \to \varphi(y)\Big)$$

$$\Diamond_a \varphi(x) \equiv \exists y\Big(E_a xy \wedge \varphi(y)\Big) : \quad \exists y\Big((x \xrightarrow{a} y) \wedge \varphi(y)\Big)$$

ML-Spiel: Bisimulation

Konfigurationen:
$(\mathcal{Q}, q; \mathcal{Q}', q')$ mit je *einem* markierten Zustand

Zugabtausch in einer Runde:
I bewegt Spielstein längs einer E_a-Kante in $\mathcal{Q}$ oder in $\mathcal{Q}'$
II antwortet in der anderen Struktur

von $(\mathcal{Q}, q; \mathcal{Q}', q')$ zu Nachfolgekonfiguration $(\mathcal{Q}, r; \mathcal{Q}', r')$
mit $(q, r) \in E_a^{\mathcal{Q}}$ und $(q', r') \in E_a^{\mathcal{Q}'}$

Gewinnbedingung:
I/II verlieren wenn sie nicht ziehen können
II verliert wenn sich aktuelle Positionen atomar unterscheiden

Ehrenfeucht-Fraïssé Satz für ML:

II hat Gewinnstrategie in $G^n_{\mathsf{ML}}(\mathcal{Q}, q; \mathcal{Q}', q')$
gdw. $\mathcal{Q}, q \equiv^{\mathsf{ML}}_n \mathcal{Q}', q'$

Modallogik und Bisimulation

Bisimulationsspiel:
unbeschränktes (unendliches) ML-Spiel $G^\infty_{\mathsf{ML}}(\mathcal{Q}, q; \mathcal{Q}', q')$

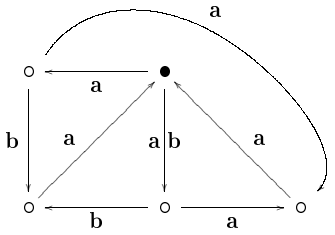
beschreibt vollständige Prozess-Äquivalenz / mehr als $\equiv^{\mathsf{ML}}$

zentrale Resultate:

- ML-Formeln unterscheiden nicht zwischen bisimulationsäquivalenten Situationen
- über endlich verzweigten Systemen fällt ML-Äquivalenz mit Bisimulationsäquivalenz zuammen (Hennessy-Milner)
- ML erfasst genau diejenigen FO-Eigenschaften, die Bisimulationsäquivalenz respektieren (van Benthem)

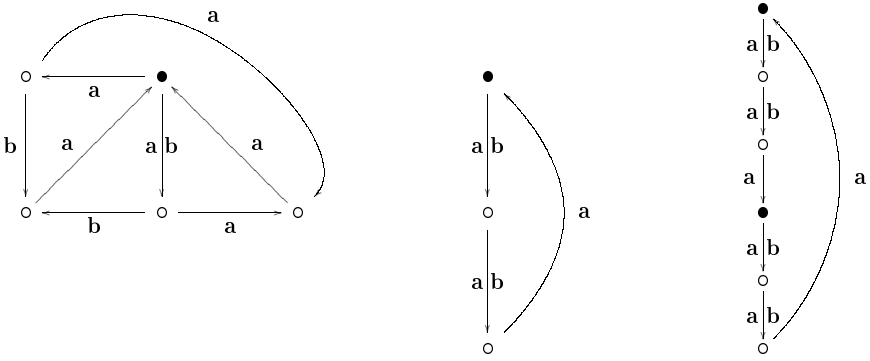
Modallogik und Bisimulation: Beispiel

in Transitionsssystem zu $\Sigma = \{a, b\}$:



- $\models \Diamond_a \Box_b \Diamond_a \Box_b \Diamond_a \Box_b \bot$

Bisimulationsäquivalenz: Beispiel



- $\models \Diamond_a \Box_b \Diamond_a \Box_b \Diamond_a \Box_b \bot$

ML-Formeln unterscheiden nicht zwischen bisimulationsäquivalenten Situationen