Ausblick: andere Logiken — Beispiele

Ausdrucksstärke — gute algorithmische Eigenschaften

Modallogiken

Anwendungen in der Wissensrepräsentation, KI

Fragment(e) von FO: eingeschränkte Quantifizierung längs Kanten in Transitionssystemen; Formeln mit einer freien Variablen

SAT entscheidbar

Temporallogiken LTL, CTL, μ-Kalkül

Anwendungen in Verfikation, model checking für Transitionssysteme, (verzweigte) Prozesse, etc.

SAT entscheidbar, für viele Zwecke ausdrucksstärker als FO

Ausblick: entscheidbare Fragmente von FO

über relationalen Signaturen ist SAT z.B. entscheidbar für:

- pränexe $\exists^*\forall^*$-Sätze
- pränexe gleichheitsfreie $\exists^*\forall\forall\exists^*$-Sätze
- pränexe $\exists^*\forall\exists^*$-Sätze
- FO-Sätze mit nur zwei Variablensymbolen

Ausblick: andere Logiken — Beispiele

Monadische Logik zweiter Stufe, MSO

monadische zweite Stufe MSO:

Quantifizierung auch über Teilmengen der Trägermenge
es existiert *kein* vollständiges Beweissystem
Allgemeingültigkeit nicht einmal rekursiv aufzählbar

aber SAT(MSO) entscheidbar über interessanten Strukturklassen: z.B. Wortmodelle, lineare Ordnungen, Bäume

enger Zusammenhang mit Automatentheorie
z.B. Satz von Büchi:

$\boxed{\text{reguläre Sprachen} = \text{MSO definierbare Wortmodellklassen}}$

Ausblick: entscheidbare Theorien

Beispiele

entscheidbar	dagegen unentscheidbar
MSO-Theorie von Bäumen (Rabin)	Graphentheorie, FO
FO-Th$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ (Tarski)	FO-Th$(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$
FO-Th$(\mathbb{N}, +, 0, 1, <)$ (Presburger)	
FO-Theorie abelscher Gruppen	Gruppentheorie, FO

Ausblick: Ausdrucksstärke verschiedener Logiken

Welche Struktureigenschaften können in gegebener Logik formalisiert werden?

Welche Eigenschaften sind nicht ausdrückbar?

z.B. *nicht* in FO: Endlichkeit der Trägermenge
Zusammenhang von (endlichen) Graphen
gerade Länge endlicher linearer Ordnungen
...

$\rightarrow$ Modelltheorie

die Methode zur Analyse der Ausdrucksstärke:
$\boxed{\text{Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele}}$

Ausdrucksstärke: Beispiele

Es gibt keine Satzmenge in FO($\{E\}$), die den Zusammenhang von Graphen (V, E) formalisiert (anlog für Erreichbarkeitsfragen).

Es gibt keinen Satz in FO($\{E\}$), der den Zusammenhang von endlichen Graphen (V, E) formalisiert (anlog für Erreichbarkeit).

Jeder Satz in FO($\{<\}$), der formalisiert, dass $<$ eine lineare Ordnung ist, benutzt mehr als zwei Variablen.

Es gibt keinen Satz in FO($\{<\}$), der von einer endlichen linearen Ordnung $(A, <)$ besagt, dass sie ungerade Länge hat.

Jeder Satz in FO($\{<\}$), der von einer linearen Ordnung $(A, <)$ besagt, dass sie mindestens die Länge 17 hat, hat mindestens Quantorenrang 5.

Fragen der Ausdrucksstärke

Kernfrage $\boxed{\text{welche Logik wofür?}}$

zB bei der Wahl einer Logik als Sprache für

Spezifikation, Verifikation, Deduktion
Wissensrepräsentation, Datenbankabfragen

Kriterien: algorithmische Eigenschaften
beweistheoretische Eigenschaften
Ausdrucksstärke

- wie kann man analysieren, was ausdrückbar ist?
- wie erkennt/beweist man, dass etwas *nicht* ausdrückbar ist?

wesentliche Methode: Spiele, Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

vgl. Semantikspiel zwischen Verifizierer und Falsifizierer

Idee: Spielprotokoll für zwei Spieler **I** und **II**
zum Vergleich zweier Strukturen so, dass
$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ähnlich (ununterscheidbar in L)
wenn Spieler **II** Gewinnstrategie hat.

Spieler **II** muss in der jeweils anderen Struktur nachmachen,
was **I** in einer der Strukturen vorgibt

Spieler **I** versucht das Spiel auf Unterschiede zu lenken,
die das für **II** unmöglich machen

Verwendung

wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ununterscheidbar in L,
aber verschieden hinsichtlich Eigenschaft E,
dann lässt sich E *nicht* in L ausdrücken