Klauselmengen und universell-pränexe Sätze

semantisch identifiziere Klauselmenge mit Satzmenge:

$$K \equiv \Big\{ \underbrace{\forall x_1 \ldots \forall x_n}_{\text{alle Variablen in } C} \bigvee C : C \in K \Big\}$$

$$\Big(\equiv \underbrace{\forall x_1 \ldots \forall x_n}_{\text{alle Variablen in } K} \bigwedge_{C \in K} \bigvee C \qquad \text{für endliches } K \Big)$$

Korrespondenzen:

endliche FO$^{\neq}$ Klauselmengen	$\leftrightsquigarrow$	universell-pränexe FO$^{\neq}$-Sätze
FO$^{\neq}$ Klauselmengen	$\leftrightsquigarrow$	universell-pränexe FO$^{\neq}$-Satzmengen

Übersetzungs-Beispiel

$\varphi = \forall x \forall y \Big(Rxy \to (Qx \leftrightarrow \neg Qy) \Big)$

relevante Atome: $\alpha = Rxy$, $\beta_1 = Qx$ und $\beta_2 = Qy$

$\varphi = \forall x \forall y \Big(\alpha \to (\beta_1 \leftrightarrow \neg \beta_2) \Big)$

Kern von φ in KNF (z.B.):

$$\underbrace{(\neg\alpha \vee \beta_1 \vee \neg\beta_1)}_{\equiv 1} \wedge (\neg\alpha \vee \beta_1 \vee \beta_2) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta_2 \vee \neg\beta_1) \wedge \underbrace{(\neg\alpha \vee \neg\beta_2 \vee \beta_2)}_{\equiv 1}$$

$$K = \Big\{ \{\neg\alpha, \beta_1, \beta_2\}, \{\neg\alpha, \neg\beta_1, \neg\beta_2\} \Big\}$$
$$= \Big\{ \{\neg Rxy, Qx, Qy\}, \{\neg Rxy, \neg Qy, \neg Qx\} \Big\}$$

Grundinstanzen-Resolution (GI)

Idee: Übertragung von AL-Resolution gemäß Reduktionsansatz
ähnlich wie schon für andere Erfüllbarkeitsargumente

Grundinstanzen einer Klausel C über Literalen $\lambda \in \text{FO}^{\neq}_n$:

$$C(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n) := \{\lambda(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n) \colon \lambda \in C\}$$
mit $t_i \in T_0(S)$

Grundinstanzenmenge einer Klauselmenge K:

$$\text{GI}(K) := \Big\{ C(t_1/x_1, \ldots) \colon C \in K, t_i \in T_0(S) \Big\}$$

- es gilt $K \models \text{GI}(K)$.

und aus dem Satz von Herbrand:

- K und GI(K) *erfüllbarkeitsäquivalent*.

GI-Resolution: Resolventen

C_1, C_2, C Klauseln von variablenfreien FO$^{\neq}(S)$-Literalen

C ist *Resolvente* von C_1 und C_2
(bezüglich des Literals λ), wenn

$$\lambda \in C_1, \quad \overline{\lambda} \in C_2, \quad \text{und } C = (C_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{\lambda}\})$$

$$C_1 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \underline{\lambda}\} \qquad C_2 = \{\lambda'_1, \ldots, \lambda'_\ell, \overline{\underline{\lambda}}\}$$

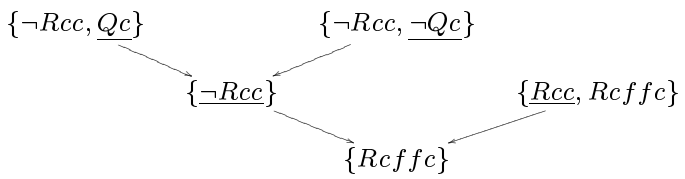
$$C = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_\ell\}$$

Zu Klauselmenge K über variablenfreien FO$^{\neq}(S)$-Literalen:

$$\text{Res}^*(K) = \text{Abschluß von } K \text{ unter Resolventenbildung}$$

Beispiel

über Grundinstanzen von
$\{\neg Rxy, Qx, Qy\}$, $\{\neg Rxy, \neg Qx, \neg Qy\}$ und $\{Rxx, Rxfffx\}$:



$$\left.\begin{array}{c}\forall x\forall y\big(\neg Rxy \vee Qx \vee Qy\big)\\ \forall x\forall y\big(\neg Rxy \vee \neg Qx \vee \neg Qy\big)\\ \forall x\big(Rxx \vee Rxfffx\big)\end{array}\right\} \models Rcfffc$$

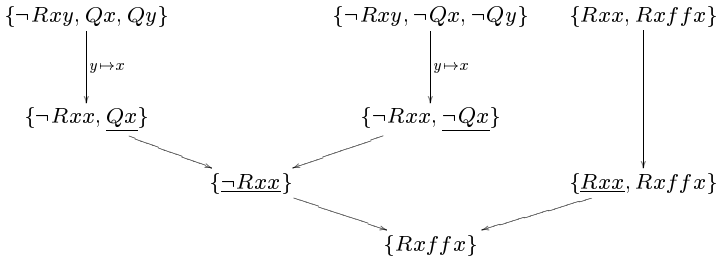
allgemeinere Resolution

Idee: nicht notwendig zu Grundinstanzen absteigen
Resolution nach Substitution von Termen mit Variablen

Substitutionsinstanz zu $\sigma = (t_1, \ldots, t_n) \in T(S)^n$:
$C^\sigma = \{\lambda^\sigma \colon \lambda \in C\} = \{\lambda(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n) \colon \lambda \in C\}$

Resolution von C_1 und C_2 zu C falls für geeignete σ_1 und σ_2:
$\lambda \in C_1^{\sigma_1}, \overline{\lambda} \in C_2^{\sigma_2}, C = (C_1^{\sigma_1} \setminus \{\lambda\}) \cup (C_2^{\sigma_2} \setminus \{\overline{\lambda}\})$

Bsp.:



$\forall x\forall y\big(\neg Rxy \vee Qx \vee Qy\big), \forall x\forall y\big(\neg Rxy \vee \neg Qx \vee \neg Qy\big), \forall x\big(Rxx \vee Rxfffx\big) \models \forall x Rxfffx$

GI-Resolution: Resolutionssatz

Korrektheit und *Vollständigkeit* von GI-Resolution
für die Unerfüllbarkeit von universell-pränexen FO$^{\neq}(S)$-Satzmengen
in Klauselform

Resolutionssatz

Für FO$^{\neq}(S)$-Klauselmengen K sind äquivalent:

(i) K unerfüllbar.

(ii) GI(K) unerfüllbar.

(iii) $\square \in$ Res*(GI(K)).

(iii) $\Rightarrow$ (i): $C \in$ Res*(GI(K)) impliziert, dass $K \models C$
$\square \equiv 0$ unerfüllbar.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Erfüllbarkeitsäquivalenz (Herbrand).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vollständigkeit von AL Resolution + Reduktion.

Sequenzenkalküle — vgl. AL Sequenzenkalkül

Allgemeingültigkeitsbeweise (für bel. FO-Formeln/Sätze)

Gegenstand: FO-*Sequenzen* $\Gamma \vdash \Delta$
für endliche $\Gamma, \Delta \subseteq$ FO$_0(S)$

$\Gamma \vdash \Delta$ *allgemeingültig* wenn $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$

Beweisziel: Ableitung allgemeingültiger Sequenzen

Korrektheit: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig.

Vollständigkeit: jede allgemeingültige Sequenz ist ableitbar.
(schwache Form, wird später verschärft)

Ableitungsschritte: Anwendung von *Regeln*
(zur Erzeugung von Sequenzen)

Sequenzenkalkül: Regeln und Korrektheit

Format von *Sequenzenregeln* (wie in AL): $\dfrac{\text{Prämissen}}{\text{Konklusion}}$

Konklusionen von Regeln ohne Prämisssen: *Axiome*

ableitbare Sequenzen:
ausgehend von Axiomen (in endlich vielen Schritten) durch Anwendung von Sequenzenregeln erzeugte Sequenzen

Korrektheit: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig.

folgt aus der Korrektheit der einzelnen Regeln:

- die Axiome sind allgemeingültige Sequenzen.
- für Regeln mit Prämissen:
  Prämissen allgemeingültig $\Rightarrow$ Konklusion allgemeingültig.

Sequenzenkalkül: Regeln

FO Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$, drei Gruppen von Regeln:

- *AL Regeln* (analog zum AL-Sequenzenkalkül).
- *Quantorenregeln*: Einführung von $\forall$ oder $\exists$ links/rechts.
  (∀L), (∀R), (∃L), (∃R).
- *Gleichheitsregeln*: Umgang mit Term-Gleichheiten.
  (=), (Sub-L), (Sub-R).

AL + Quantorenregeln: vollständiger Beweiskalkül $\mathcal{SK}^{\neq}$ für FO$^{\neq}$.

$\mathcal{SK}^{\neq}$ + Gleichheitsregeln: vollständiger Beweiskalkül $\mathcal{SK}$ für FO.

Zusätzlich (nicht notwendig aber natürlich) in $\mathcal{SK}^{+}$:

- *Schnittregeln*: Kettenschlüsse und Beweise durch Widerspruch.

Sequenzenkalkül: Quantorenregeln

(∀L) $\dfrac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \Delta}$ (∀R) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi(x)}$

falls c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

(∃L) $\dfrac{\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta}$ (∃R) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi(x)}$

falls c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

Korrektheit prüfen!

Sequenzenkalkül: Gleichheitsregeln

(=) $\dfrac{\Gamma, t = t \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$

(Sub-L) $\dfrac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, t = t', \varphi(t'/x) \vdash \Delta}$ (Sub-R) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma, t = t' \vdash \Delta, \varphi(t'/x)}$

und analoge Regeln mit $t' = t$ statt $t = t'$

Korrektheit prüfen!