Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

Abgabe: Di. 24.6., nach der Vorlesung

Geben Sie bitte ihren Namen und die Nummer ihrer Übungsgruppe an.

(H2.1)

$\preccurlyeq$ sei ein 2-stelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preccurlyeq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \wedge x_4 \preccurlyeq x_2) \rightarrow x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big).$$

(a) Sei $\mathcal{A} = (A, \preccurlyeq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0,1,2\}$ und $\preccurlyeq^{\mathcal{A}} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,2)\}$. Zeigen Sie $\mathcal{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.

Hinweis:

(i) Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie $\mathsf{SF}(\varphi')$.

(ii) Skizzieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.

(iii) Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

(b) Sei ψ eine zu

$$\exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \wedge x_4 \preccurlyeq x_2) \rightarrow x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big)$$

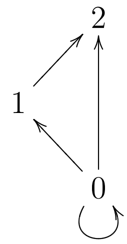
äquivalente Formel in Negationsnormalform.
Für welche $(a_1', a_2') \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$$

eine Gewinnstrategie?

Musterlösung.

(a) Eine Menge mit einer zweistelligen Relation ist i.A. ein (gerichteter) Graph, also kann man $\mathcal{A}$ folgendermaßen darstellen



und $\varphi^{\mathcal{A}}$ bedeutet, dass es zu zwei Elementen x_1 und x_2 ein Element x_3 gibt, mit $x_3 \to x_1$ und $x_3 \to x_2$ und es zu jedem x_4 mit $x_4 \to x_1$ und $x_4 \to x_2$ eine Kante $x_4 \to x_3$ gibt. Man überprüft leicht, dass für $x_1 \mapsto 2$ und $x_2 \mapsto 2$ kein x_3 mit der benötigten Eigenschaft existiert, also $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

Als nächstes formen wir φ in Negationsnormalform um:

$$\begin{aligned}
\varphi &\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \wedge x_4 \preccurlyeq x_2) \to x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big) \\
&\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big(\neg (x_4 \preccurlyeq x_1 \wedge x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big) \\
&\equiv \underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big)}_{=:\varphi'}
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass für beliebige $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ der Falsifizierer in der Spielposition $(\varphi', (a_1, a_2, a_3, a_4))$ *eine Gewinnstrategie hat*: Angenommen der Falsifizierer zieht von der Position

$$\Big(\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \big), (a_1, a_2, a_3, a_4) \Big)$$

nach

$$\Big(\forall x_2 \exists x_3 \big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \big), (2, a_2, a_3, a_4) \Big)$$

und von dort nach

$$\Big(\exists x_3 \big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \big), (2, 2, a_3, a_4) \Big)$$

dann hat der Verifizierer drei Möglichkeiten zu ziehen:

$a_3 \mapsto 2$:

$$\Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3 \big), (2, 2, 2, a_4) \Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2, (2, 2, 2, a_4) \Big)$$

und

$$\Big(x_3 \preccurlyeq x_1, (2, 2, 2, a_4) \Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 2 \preccurlyeq 2$.

$a_3 \mapsto 1$:

$$\Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (2, 2, 1, a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (2, 2, 1, a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3, (2, 2, 1, 1)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 1 \preccurlyeq 1$ und $\mathcal{A} \models 1 \preccurlyeq 2$.

$a_3 \mapsto 0$:

$$\Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (2, 2, 0, a_4)\Big)$$

dann kann der Falsifizierer nach

$$\Big(\forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (2, 2, 0, a_4)\Big)$$

und

$$\Big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3, (2, 2, 0, 1)\Big)$$

ziehen und gewinnt wegen $\mathcal{A} \not\models 1 \preccurlyeq 0$ und $\mathcal{A} \models 1 \preccurlyeq 2$.

Also hat der Falsifizierer eine Gewinnstrategie, und es gilt $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

(b) Wir zeigen, dass der Verifizierer für alle $(a'_1, a'_2) \in A \times A \setminus \{(2, 2)\}$ eine Gewinnstrategie hat:
Der Verifizierer zieht von $(\psi, (a'_1, a'_2, a_3, a_4))$ nach

$$\Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (a'_1, a'_2, 0, a_4)\Big)$$

Der Falsifizierer hat nun zwei Zugmöglichkeiten:

(1) Er zieht nach

$$\big(x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2, (a'_1, a'_2, 0, a_4)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathcal{A} \models 0 \preccurlyeq x$ für alle $x \in A$.

(2) Er zieht nach

$$\big(\forall x_4 \big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3\big), (a'_1, a'_2, 0, a_4)\big)$$

dann hat der Falsifizierer im nächsten Zug drei Möglichkeiten:

(i) Er zieht nach

$$\big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \vee \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \vee x_4 \preccurlyeq x_3, (a'_1, a'_2, 0, 0)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer im nächsten Zug, da $\mathcal{A} \models 0 \preccurlyeq 0$

(ii) Er zieht nach

$$\big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \lor \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \lor x_4 \preccurlyeq x_3, (a_1', a_2', 0, 1)\big)$$

oder

$$\big((\neg x_4 \preccurlyeq x_1 \lor \neg x_4 \preccurlyeq x_2) \lor x_4 \preccurlyeq x_3, (a_1', a_2', 0, 2)\big)$$

dann gewinnt der Verifizierer in zwei Zügen, da a_1' oder a_2' ungleich 2 ist und $\mathcal{A} \not\models 1 \preccurlyeq 1$ und $\mathcal{A} \not\models 1 \preccurlyeq 0$ bzw. $\mathcal{A} \not\models 2 \preccurlyeq 1$ und $\mathcal{A} \not\models 2 \preccurlyeq 0$ gelten.

(H2.2)

Betrachten Sie die folgenden FO-Formeln:

(i) $\exists x(Px \to \forall x Px)$

(ii) $\exists y(Ryy \land \forall x(Rxy \to \exists z(Rxz \land Rzy)))$

(iii) $\forall x \exists y Pxy \to \exists x \forall y Rxy$

(iv) $\forall y \exists x(Rxy \lor \exists z Pzx)$

(a) Geben Sie für jede dieser FO-Formeln äquivalente Formeln in pränexer Normalform und in Skolemnormalform an.

(b) Geben Sie für eine zu (ii) äquivalente Formel in Skolemnormalform sowohl ein Herbrand-Model an, als auch ein endliches Modell und ein Modell mit Elementen, die nicht durch variablenfreien Terme beschrieben werden.

Musterlösung.

(a) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an:

(i) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned} \exists x(Px \to \forall x Px) &\equiv \exists x(Px \to \forall y Py) \\ &\equiv \exists x \forall y(Px \to Py) \end{aligned}$$

Skolemnormalform: $\forall y(Pc \to Py)$.

(ii) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned} \exists y(Ryy \land \forall x(Rxy \to \exists z(Rxz \land Rzy))) &\equiv \exists y(Ryy \land \forall x \exists z(Rxy \to (Rxz \land Rzy))) \\ &\equiv \exists y \forall x \exists z(Ryy \land (Rxy \to (Rxz \land Rzy))) \end{aligned}$$

Skolemnormalform: $\forall x\,(Rcc \land (Rxc \to (Rxf(x) \land Rf(x)c)))$.

(iii) Pränexe Normalform:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y Pxy \to \exists x \forall y Rxy &\equiv \forall x \exists y Pxy \to \exists u \forall v Ruv \\ &\equiv \neg \forall x \exists y Pxy \lor \exists u \forall v Ruv \\ &\equiv \exists x \forall y \neg Pxy \lor \exists u \forall v Ruv \\ &\equiv \exists x \forall y \exists u \forall v(\neg Pxy \lor Ruv) \\ &\equiv \exists x \forall y \exists u \forall v(Pxy \to Ruv) \end{aligned}$$

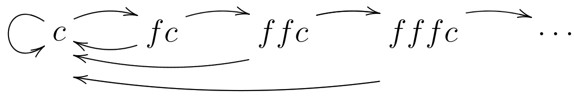
Skolemnormalform: $\forall y \forall v(Pcy \to Rf(y)v)$.

(iv) Pränexe Normalform:

$$\forall y \exists x (Rxy \vee \exists z Pzx) \quad \equiv \quad \forall y \exists x \exists z (Rxy \vee Pzx)$$

Skolemnormalform: $\forall y (Rf(y)y \vee Pg(y)f(y))$.

(b) Folgendes stellt ein Herbrand-Modell $\mathcal{H}$ dar, wobei ein Pfeil von x nach y bedeutet, dass $(x, y) \in R^{\mathcal{H}}$:



Identifiziert man alle $f^n c$ mit c, dann bekommt man daraus ein einfaches endliches Modell:

Daraus bekommt man dann ein Modell mit Elementen die nicht durch variablenfreie Terme beschrieben werden, z.B. dadurch dass man ein neues Element hinzufügt, das in keiner Beziehung zu c steht und von f auf sich selbst abgebildet wird:

(H2.3)

(a) Geben Sie eine passende Signatur an, und drücken Sie darüber die folgenden „Tatsachen" durch Sätze der Logik erster Stufe aus:

(i) Ein Drache ist glücklich, wenn alle seine Kinder fliegen können.

(ii) Grüne Drachen können fliegen.

(iii) Ein Drache ist grün, wenn einer seiner Elterndrachen grün ist.

(iv) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Hinweis: Überlegen Sie sich u. a., was Sie in der Signatur benötigen, um „ist Kind von" ausdrücken zu können.

(b) Leiten sie argumentativ die vierte Aussage aus den ersten drei her.

(c) Zeigen Sie mittels Reduktion von FO auf AL und dem AL-Resolutionsverfahren, dass die vierte Aussage aus den ersten drei folgt.

Hinweis: Beachten Sie, dass man auf eine Skolemfunktion geführt wird, die ggf. „non-flying-kids" liefert.

Musterlösung.

(a) Eine mögliche Signatur ist $S = (G, F, L, C)$, wobei G (green), F (can fly) und H (happy) einstellige Relationssymbole sind, und C (child of) ein zweistelliges Relationssymbol ist.
Obige Aussagen entsprechen folgenden FO(S)-Sätzen:

(i) $\varphi_1 := \forall x(\forall y(Cyx \to Fy) \to Hx)$

(ii) $\varphi_2 := \forall x(Gx \to Fx)$

(iii) $\varphi_3 := \forall x(\exists y(Cxy \land Gy) \to Gx)$

(iv) $\varphi_4 := \forall x(Gx \to Hx)$

(b) Angenommen g ist ein grüner Drache, und c ist ein Kind von g. Dann ist c grün (wegen (iii)) und kann damit auch fliegen (wegen (ii)). Also können alle Kinder von g fliegen, also ist g (wegen (i)) glücklich.

(c) Wir wollen zeigen, dass die Satzmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ unerfüllbar ist. Dazu bringen wir diese Sätze in Skolennormalform:

(i)

$$\forall x(\forall y(Cyx \to Fy) \to Hx) \quad \equiv \quad \forall x \exists y((Cyx \to Fy) \to Hx)$$

Skolemnormalform: $\forall x((Cf(x)x \to Ff(x)) \to Hx)$.

(ii) Ist bereits in Skolemnormalform: $\forall x(Gx \to Fx)$

(iii)

$$\forall x(\exists y(Cxy \land Gy) \to Gx) \quad \equiv \quad \forall x \forall y((Cxy \land Gy) \to Gx)$$

Skolemnormalform: $\forall x \forall y((Cxy \land Gy) \to Gx)$.

(iv)

$$\neg\forall x(Gx \to Hx) \quad \equiv \quad \exists x(Gx \land \neg Hx)$$

Skolemnormalform: $Gc \land \neg Hc$.

Wir haben nun also die erweiterte Signatur $S' = S \cup \{f, c\}$ und erhalten als Trägermenge einer Herbrand-Struktur zu S'

$$T_0(S') = \{c, fc, ffc, fffc, ffffc, \ldots\} = \{f^n c \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

und mit den Variablenbenennungen p_X für Atome X erhalten wir folgende Klauseln:

$$\begin{array}{cl} \{p_{Cf(t)t}, p_{Ht}\}, \{\neg p_{Ff(t)}, p_{Ht}\} & \text{von (i)} \\ \{\neg p_{Gt}, p_{Ft}\} & \text{von (ii)} \\ \{\neg p_{Cst}, \neg p_{Gt}, p_{Gs}\} & \text{von (iii)} \\ \{p_{Gc}\}, \{\neg p_{Hc}\} & \text{von (iv)} \end{array}$$

Wir erhalten folgenden Resolutionsbaum:

$$\begin{tikzcd}
\{p_{Cfcc}, p_{Hc}\} \arrow[dr] & \{\neg p_{Hc}\} \arrow[d] & & & \\
\{\neg p_{Cfcc}, \neg p_{Gc}, p_{Gfc}\} \arrow[dr] & \{p_{Cfcc}\} \arrow[d] & & \{\neg p_{Ffc}, p_{Hc}\} \arrow[d] & \{\neg p_{Hc}\} \arrow[dl] \\
\{p_{Gc}\} \arrow[dr] & \{\neg p_{Gc}, p_{Gfc}\} \arrow[d] & & \{\neg p_{Ffc}\} \arrow[d] & \{\neg p_{Gfc}, p_{Ffc}\} \arrow[dl] \\
& \{p_{Gfc}\} \arrow[dr] & & \{\neg p_{Gfc}\} \arrow[dl] & \\
& & \square & &
\end{tikzcd}$$

(H2.4)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, daß die Formelmenge

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y\,((Qx \wedge Rxy) \to Sy)\,,\\
&\forall x \forall y\,((Sx \wedge Rxy) \to \neg Qy),\\
&\forall x \exists y\,(Rxy \wedge Qy)\,,
\end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

(b) Leiten Sie die folgende Sequenz ab:

$$\forall x \neg Px, \neg\exists x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash \exists x Qx\,.$$

(c) Beweisen Sie die Korrektheit der Regel

$$\frac{\Gamma, \varphi(s,t) \vdash \Delta, \psi(s,t) \qquad \Gamma, \psi(s,t) \vdash \varphi(s,t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x \exists y(\varphi(x,y) \leftrightarrow \psi(x,y)), \Delta}$$

(i) semantisch, d. h. mit Hilfe von Interpretationen;

(ii) indem Sie diese Regel mit den bekannten Regeln des Sequenzenkalküls simulieren.

Musterlösung.

(a) Wir schreiben erst die Aussagen in Klauselform um:

$$\begin{gathered}
\{\neg Qx, \neg Rxy, Sy\}\\
\{\neg Sx, \neg Rxy, \neg Qy\}\\
\{Rxfx\}, \{Qfx\}
\end{gathered}$$

Mit Grundinstanzen-Resolution leitet man dann ab:

$$\begin{tikzcd}
& \{\underline{Rfcffc}\} \arrow[dr] & & \{\neg Qfc, \underline{\neg Rfcffc}, Sffc\} \arrow[dl] \\
\{\underline{Qfc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Qfc}, Sffc\} \arrow[dl] & \\
& \{\underline{Sffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Sffc}, \neg Rffcfffc, \neg Qfffc\} \arrow[dl] \\
\{\underline{Rffcfffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{\neg Rffcfffc}, \neg Qfffc\} \arrow[dl] & \\
& \{\underline{\neg Qfffc}\} \arrow[dr] & & \{\underline{Qfffc}\} \arrow[dl] \\
& & \square &
\end{tikzcd}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg Pz \vdash \neg Pz, Qz} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg Pz, Qz \vdash Qz}}{\neg Pz \vdash \neg Qz, Qz}}{\neg Pz \vdash \neg Pz \wedge \neg Qz, Qz}}{\neg Pz \vdash \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx), Qz}}{\neg Pz, \neg\exists x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash Qz}}{\forall x \neg Px, \neg\exists x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash Qz}}{\forall x \neg Px, \neg\exists x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash \exists x Qx}$$

(c) Wäre die Sequenz $\Gamma \vdash \exists x \exists y(\varphi(x,y) \leftrightarrow \psi(x,y)), \Delta$ nicht allgemeingültig, dann gäbe es ein Modell $\mathcal{A}$ wo Γ wahr ist, $\exists x \exists y(\varphi(x,y) \leftrightarrow \psi(x,y))$ nicht und $\bigvee \Delta$ auch nicht. Wenn $\exists x \exists y(\varphi(x,y) \leftrightarrow \psi(x,y))$ nicht wahr ist, gilt insbesondere auch, dass $\varphi[s^{\mathcal{A}}, t^{\mathcal{A}}] \leftrightarrow \psi[s^{\mathcal{A}}, t^{\mathcal{A}}]$ nicht wahr ist in $\mathcal{A}$. Dann ist entweder $\varphi[s^{\mathcal{A}}, t^{\mathcal{A}}]$ wahr in $\mathcal{A}$ und $\psi[s^{\mathcal{A}}, t^{\mathcal{A}}]$ nicht, oder $\psi[s^{\mathcal{A}}, t^{\mathcal{A}}]$ ist wahr in $\mathcal{A}$ und $\varphi[s^{\mathcal{A}}, t^{\mathcal{A}}]$ nicht. Das Erste widerspricht die Allgemeingültigkeit von $\Gamma, \varphi(s,t) \vdash \Delta, \psi(s,t)$, das Zweite die Allgemeingültigkeit von $\Gamma, \psi(s,t) \vdash \varphi(s,t), \Delta$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \varphi(s,t) \vdash \Delta, \psi(s,t)}{\Gamma \vdash \neg\varphi(s,t), \psi(s,t), \Delta}}{\Gamma \vdash \varphi(s,t) \to \psi(s,t), \Delta}\,(*) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \psi(s,t) \vdash \Delta, \varphi(s,t)}{\Gamma \vdash \neg\psi(s,t), \varphi(s,t), \Delta}}{\Gamma \vdash \psi(s,t) \to \varphi(s,t), \Delta}\,(*)}{\Gamma \vdash \varphi(s,t) \leftrightarrow \psi(s,t), \Delta}\,(*)}{\Gamma \vdash \exists y(\varphi(s,y) \leftrightarrow \psi(s,y)), \Delta}}{\Gamma \vdash \exists x \exists y(\varphi(x,y) \leftrightarrow \psi(x,y)), \Delta}$$

(*): Beachten Sie, dass $\varphi \to \psi$ als Abkürzung für $\neg\varphi \wedge \psi$ steht und $\varphi \leftrightarrow \psi$ für $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

(H2.5)

Sei Σ ein Alphabet und $S = \{(E_a)_{a \in \Sigma}, s\}$ die zugehörige Signatur für Transitionssysteme mit einer Konstante s für das Startsymbol.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es keinen FO(S)-Satz gibt, der genau dann wahr ist in einer S-Struktur $\mathcal{A} = (Q, (E_a^{\mathcal{A}})_{a \in \Sigma}, s^{\mathcal{A}})$, wenn es *keinen* unendlichen Lauf gibt: d.h., wenn es keine unendliche Folge $(q_i \in Q)_{i \in \mathbb{N}}$ gibt, so dass $q_0 = s^{\mathcal{A}}$ und für alle $i \in \mathbb{N}$ mindestens ein $a \in \Sigma$ existiert mit $(q_i, q_{i+1}) \in E_a^{\mathcal{A}}$.

Warnung: Beachten Sie auch den Unterschied zwischen die Existenz von „beliebig langen Läufen" und „unendlichen Läufen".

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es keine FO(S)-Formel $\varphi(x)$ gibt, die die Erreichbarkeit vom Startzustand s aus definiert, in dem Sinne, dass für eine S-Struktur $\mathcal{A} = (Q, (E_a^{\mathcal{A}})_{a \in \Sigma}, s^{\mathcal{A}})$ und $a \in Q$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[a]$ genau dann wenn a in $\mathcal{A}$ von $s^{\mathcal{A}}$ aus erreichbar ist.

Erinnerung: a ist in $\mathcal{A}$ von $s^{\mathcal{A}}$ aus erreichbar wenn es eine Folge $(q_i \in Q)_{i \leqslant n}$ gibt, so dass $q_0 = s^{\mathcal{A}}$, $q_n = a$ und für alle $i < n$ mindestens ein $a \in \Sigma$ existiert mit $(q_i, q_{i+1}) \in E_a^{\mathcal{A}}$.

Musterlösung.

(a) Angenommen, es gibt einen Satz φ der genau dann wahr ist, wenn es keinen unendlichen Lauf gibt.

Sei a ein beliebiges Element aus Σ. Wir erweiteren die Signatur S mit unendlich vielen Konstanten $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und betrachten die folgende Formelmenge in der erweiterten Sprache:

$$\Gamma = \{\varphi, s = c_0, c_0 E_a c_1, c_1 E_a c_2, c_2 E_a c_3, \ldots\}.$$

Γ is unerfülllbar, da ein Modell $\mathcal{A}$ von Γ gleichzeitig einen unendlichen Lauf $q_i = c_i^{\mathcal{A}}$ enthalten würde und φ wahr machen würde. Also ist schon eine endliche Teilmenge von Γ unerfüllbar und insbesondere ist schon eine Teilmenge von der Form

$$\Gamma_n = \{\varphi, s = c_0, c_0 E_a c_1, c_1 E_a c_2, c_2 E_a c_3, \ldots, c_{n-1} E_a c_n\}$$

unerfüllbar (da jede endliche Teilmenge in einer Γ_n enthalten ist). Aber jedes Γ_n hat ein Modell, das so aussieht:

$$\longrightarrow 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} \cdots \xrightarrow{a} n,$$

wobei wir s als der 0-Zustand interpreteren und c_i als Zustand i.

Also haben wir einen Widerspruch und schliessen, dass es keinen Satz φ geben kann, der genau dann wahr ist, wenn es keinen unendlichen Lauf gibt.

(b) Angenommen, es gibt eine Formell $\varphi(x)$ die genau die Erreichbarkeit vom Startzustand aus definiert. Wir versuchen einen Widerspruch zu erreichen, wobei wir verwenden, dass man eine Formel $\varphi_n(y)$ definieren kann, die aussagt, dass es einen Pfad der Länge n vom Startzustand nach y gibt:

$$\varphi_n(y) = \exists x_0 \ldots \exists x_n \, (\, x_0 = s \wedge x_n = y \wedge \bigwedge_{i<n} \bigvee_{a \in \Sigma} x_i E_a x_{i+1} \,).$$

Wir erweiteren die Signatur S mit einer Konstante c und betrachten die folgende Formelmenge in der erweiterten Sprache:

$$\Gamma = \{\varphi(c), \neg\varphi_0(c), \neg\varphi_1(c), \neg\varphi_2(c), \ldots\}.$$

Die Formelmenge Γ is unerfülllbar, da man in einem Modell $\mathcal{A}$ die Konstante c nicht widerspruchsfrei interpreteren kann: einerseits soll der Zustand $c^{\mathcal{A}}$ von $s^{\mathcal{A}}$ aus erreichbar sein, da $\varphi(c)$ wahr ist; andererseits kann $c^{\mathcal{A}}$ nicht von $s^{\mathcal{A}}$ aus erreichbar sein: somit dann würde es einen Pfad von $s^{\mathcal{A}}$ nach $c^{\mathcal{A}}$ geben; dieser Pfad hat eine bestimmte Länge n, was unmöglich ist, da $\mathcal{A} \vdash \neg\varphi_n(c)$.

Also ist schon eine endliche Teilmenge von Γ unerfüllbar und insbesondere ist schon eine Teilmenge von der Form

$$\Gamma_n = \{\varphi(c), \neg\varphi_0(c), \ldots, \neg\varphi_{n-1}(c)\}$$

unerfüllbar (da jede endliche Teilmenge in einer Γ_n enthalten ist). Aber jedes Γ_n hat ein Modell, wobei $c^{\mathcal{A}}$ von $s^{\mathcal{A}}$ aus erreichbar ist, aber nicht in weniger dann n Schritten. (Ein Modell könnte ungefähr so aussehen:

$$\longrightarrow 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} \cdots \xrightarrow{a} n,$$

wobei wir s als der 0-Zustand definieren und c als der n-Zustand.)

Also haben wir einen Widerspruch und schliessen, dass es keine Formel $\varphi(x)$ geben kann, die genau die Erreichbarkeit von dem Startzustand aus definiert.