Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik II

SS 2008

Abgabe: Di. 6.5., nach der Vorlesung

Geben Sie bitte ihren Namen und die Nummer ihrer Übungsgruppe an.

(H1.1) Wir definieren folgende partielle Ordnung auf $\mathbb{B}^n$:

$$\mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}' \quad \text{:gdw.} \quad b_i \leqslant b'_i \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Eine Funktion $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ heißt *monoton* gdw.

$$\mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}' \Rightarrow f(\mathbf{b}) \leqslant f(\mathbf{b}')$$

für $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{B}^n$. Eine AL_n-Formel φ ohne Negationszeichen heißt *positiv.*

In Folgenden soll gezeigt werden, dass positive Formeln φ gerade die monotone Boolesche Funktionen f_φ repräsentieren (vgl. Abschnitt 3.1).

(a) Beweisen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass für eine positive aussagenlogische Formel $\varphi \in \mathrm{AL}_n$ die Funktion

$$\begin{array}{rccc} f_\varphi : & \mathbb{B}^n & \to & \mathbb{B} \\ & \mathbf{b} & \mapsto & \varphi[\mathbf{b}] \end{array}$$

monoton ist.

(b) Für $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^n$, sei

$$\varphi^+_{\mathbf{b}} = \bigwedge \{p_i \; : \; b_i = 1\}$$

(der positive Anteil von $\varphi_{\mathbf{b}}$, vgl. Beweis von Satz 3.2). Zeigen Sie, dass

$$\varphi^+_{\mathbf{b}} \equiv \bigvee \{\varphi_{\mathbf{b}'} \; : \; \mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}'\}.$$

(c) Zeigen Sie (analog zu Satz 3.2), dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ durch eine positive Formel in AL_n dargestellt wird.

Musterlösung.

(a) Angenommen φ ist eine aussagenlogische Formel, in der kein Negationszeichen vorkommt und $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}'$. Wir beweisen mit Induktion, dass $\varphi[\mathbf{b}] \leqslant \varphi[\mathbf{b}']$ gilt.

- $\varphi = 0$, $\varphi = 1$ sind klar.
- $\varphi = p_i \in \mathcal{V}_n$: weil $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}'$ gilt $b_i \leqslant b'_i$, also $\varphi[\mathbf{b}] \leqslant \varphi[\mathbf{b}']$.
- $\varphi = \neg\psi$ kann nicht sein, da in φ kein Negationszeichen vorkommt.
- $\varphi = \psi \wedge \chi$: nach I.V. gilt $\psi[\mathbf{b}] \leqslant \psi[\mathbf{b}']$ und $\chi[\mathbf{b}] \leqslant \chi[\mathbf{b}']$. Also gilt $\min(\psi[\mathbf{b}], \chi[\mathbf{b}]) \leqslant \min(\psi[\mathbf{b}'], \chi[\mathbf{b}'])$, und es folgt $(\psi \wedge \chi)[\mathbf{b}] \leqslant (\psi \wedge \chi)[\mathbf{b}']$.
- $\varphi = \psi \vee \chi$: nach I.V. gilt $\psi[\mathbf{b}] \leqslant \psi[\mathbf{b}']$ und $\chi[\mathbf{b}] \leqslant \chi[\mathbf{b}']$. Also gilt $\max(\psi[\mathbf{b}], \chi[\mathbf{b}]) \leqslant \max(\psi[\mathbf{b}'], \chi[\mathbf{b}'])$, und es folgt $(\psi \vee \chi)[\mathbf{b}] \leqslant (\psi \vee \chi)[\mathbf{b}']$.

(b) Zu zeigen ist, dass

$$\varphi^+_{\mathbf{b}}[\mathbf{a}] = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \bigvee\{\varphi_{\mathbf{b}'} : \mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}'\}[\mathbf{a}] = 1$$

für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{B}^n$.

$\Rightarrow$: Aus $\varphi^+_{\mathbf{b}}[\mathbf{a}] = 1$ folgt, dass $a_i = 1$ für alle i mit $b_i = 1$, d.h. $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{a}$. Da $\varphi_{\mathbf{a}}[\mathbf{a}] = 1$ immer gilt, folgt $\bigvee\{\varphi_{\mathbf{b}'} : \mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}'\}[\mathbf{a}] = 1$.

$\Leftarrow$: Angenommen $\bigvee\{\varphi_{\mathbf{b}'} : \mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}'\}[\mathbf{a}] = 1$, d.h. es gibt ein $\mathbf{b}'$ mit $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}'$ und $\varphi_{\mathbf{b}'}[\mathbf{a}] = 1$. Aber $\varphi_{\mathbf{b}'}[\mathbf{a}] = 1$ heißt einfach, dass $\mathbf{b}' = \mathbf{a}$. Es folgt, dass $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{a}$ und deshalb $a_i = 1$ für alle i mit $b_i = 1$ und $\varphi^+_{\mathbf{b}}[\mathbf{a}] = 1$.

(c) Die Monotonie von f bedeutet, dass $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}'$ und $f(\mathbf{b}) = 1$ implizieren, dass $f(\mathbf{b}') = 1$. Hieraus folgt, dass f durch die positive Formel $\bigvee\{\varphi^+_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in \mathbb{B}^n, f(\mathbf{b}) = 1\}$ dargestellt wird:

$$\begin{aligned}
\bigvee\{\varphi^+_{\mathbf{b}} : \mathbf{b} \in \mathbb{B}^n, f(\mathbf{b}) = 1\} &\equiv \bigvee\{\varphi_{\mathbf{b}'} : \text{es gibt } \mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}' \text{ mit } f(\mathbf{b}) = 1\} \\
&\equiv \bigvee\{\varphi_{\mathbf{b}'} : f(\mathbf{b}') = 1\} \\
&\equiv \varphi_f.
\end{aligned}$$

(H1.2) Ein *Dominosystem* $\mathcal{D} = (D, H, V)$ besteht aus einer endlichen Menge D von quadratischen Dominosteinen und zwei Relationen $H \subseteq D \times D$ und $V \subseteq D \times D$, so dass

- $(d, e) \in H$ gdw. e rechts neben d passt,
- $(d, e) \in V$ gdw. e unter d passt.

Wir betrachten ein festes Dominosystem $\mathcal{D} = (D, H, V)$.

(a) Geben Sie zu $n \in \mathbb{N}$ eine AL-Formelmenge Φ_n an, welche genau dann erfüllbar ist, wenn man ein Quadrat der Größe $n \times n$ so mit Dominosteinen aus $\mathcal{D}$ belegen kann, dass nebeneinander liegende Steine zueinander passen. (Wir nehmen an, dass es von jedem Dominostein unbegrenzt viele Exemplare gibt.)

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß man die gesamte Ebene $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ korrekt mit Dominosteinen belegen kann, vorausgesetzt dies geht für alle endlichen Quadrate $n \times n$.

Musterlösung.

(a) Wir benutzen Aussagenvariablen p^d_{ik} für $d \in D$ und $1 \leqslant i, k \leqslant n$, die die folgende intuitive Bedeutung haben: "Auf koordinaat (i, k) liegt ein Stein vom Type d."

$$\begin{array}{ll}
\bigvee\limits_{d \in D} p^d_{ik} & \text{für alle } i, k \\
\bigwedge\limits_{d \neq e} \neg(p^d_{ik} \wedge p^e_{ik}) & \text{für alle } i, k \\
\bigvee\limits_{(d,e) \in H} (p^d_{ik} \wedge p^e_{(i+1)k}) & \text{für alle } i, k \\
\bigvee\limits_{(d,e) \in V} (p^d_{ik} \wedge p^e_{i(k+1)}) & \text{für alle } i, k
\end{array}$$

(b) Sei Φ eine Formelmenge wie oben, aber wobei i und k beliebige natürliche Zahlen sind. Φ ist genau dann erfüllbar, wenn sich die Ebene parkettieren lässt.

Um zu zeigen, dass Φ erfüllbar ist, verwenden wir den Kompaktheitssatz. Sei $\Phi_0 \subseteq \Phi$ eine endliche Teilmenge. Dann gibt es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass in Φ_0 nur Formeln p^d_{ik} oder p^e_{ik} mit $i, k \leqslant m$ vorkommen. Wir wissen, dass sich das $m \times m$ Quadrat parkettieren läßt. Aus dieser Parkettierung können wir ein Modell von Φ_0 konstruieren. Wir haben gezeigt, dass jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist. Nach dem Kompaktheitssatz folgt, dass auch Φ erfüllbar ist.

(H1.3) Gegeben sei die folgende Menge von nicht-negativen Hornklauseln:

$$M := \{\{a, \neg d\}, \{d\}, \{\neg a, c\}, \{a, \neg b, \neg d\}, \{\neg c, \neg e, a, \neg b\}, \{\neg a, \neg d, c\}, \{\neg d, e, \neg a, \neg b\}\}$$

(a) Bestimmen Sie eine minimale Belegung für M.

(b) Betrachten Sie nun folgende Mengen von negativen Hornklauseln:

$$N_1 := \{\{\neg b\}, \{\neg d, \neg e\}\}, \qquad N_2 := \{\{\neg d, \neg a, \neg b\}, \{\neg c, \neg a\}, \{\neg c, \neg d, \neg e\}\}.$$

Überprüfen Sie für $i \in \{1, 2\}$, ob die minimale Belegung aus (a) die Klauselmenge $M \cup N_i$ erfüllt.

Musterlösung.

(a) Wir erhalten nacheinander: $d \mapsto 1$, $a \mapsto 1$, $c \mapsto 1$.
Die minimale Belegung ist also: $d \mapsto 1$, $a \mapsto 1$, $c \mapsto 1$, $b \mapsto 0$, $e \mapsto 0$.

(b) Durch einfache Überprüfung erhält man, dass die minimale Belegung $M \cup N_1$, jedoch nicht $M \cup N_2$ erfüllt.

(H1.4)

(a) Zeigen Sie, dass folgende Regeln korrekt sind.

(i) $$\frac{\Gamma \vdash \emptyset}{\Gamma \vdash \varphi}$$ (ex falso quodlibet) (ii) $$\frac{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi}{\Gamma, \varphi \vdash \chi}$$

(b) Geben Sie ein Verfahren an, das eine $\mathcal{SK}$-Ableitung von $\Gamma \vdash \emptyset$ in eine $\mathcal{SK}$-Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ transformiert.

(c) Geben Sie eine „direkte Simulation“ von Regel (ii) in $\mathcal{SK}^+$ an, d. h. geben Sie einen Ableitungsbaum in $\mathcal{SK}^+$ mit Wurzel $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ an, dessen Blätter nur mit Axiomen oder $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ beschriftet sind.

(d) Begründen Sie, warum Regel (ii) in $\mathcal{SK}$ nicht direkt simulierbar ist. D. h. zeigen Sie, dass es keinen $\mathcal{SK}$ Ableitungsbaum mit Wurzel $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ gibt, dessen Blätter nur mit Axiomen oder $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ beschriftet sind.

Hinweis: Betrachten Sie hierfür die Länge der Formeln von Prämisse und Konklusion der $\mathcal{SK}$ Regeln.

Musterlösung.

(a) Zu Regel (i): Angenommen $\Gamma \vdash \emptyset$ ist allgemeingültig. Dann gilt $\bigwedge \Gamma \vDash 0$, d. h. es gilt $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} = 0$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$. Also ist $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} \leqslant \varphi^{\mathfrak{I}}$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$, und es folgt, dass $\Gamma \vdash \varphi$ allgemeingültig ist.

Zu Regel (ii): Angenommen $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ ist allgemeingültig und $\mathfrak{I}$ eine (beliebige) Interpretation. Dann gilt $(\bigwedge \Gamma) \wedge (\varphi \vee \psi) \vDash \chi$, d. h. es gilt $((\bigwedge \Gamma) \wedge (\varphi \vee \psi))^{\mathfrak{I}} \leqslant \chi^{\mathfrak{I}}$. Also ist $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} \leqslant \chi^{\mathfrak{I}}$ oder $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} \leqslant \chi^{\mathfrak{I}}$.
Falls $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} \leqslant \chi^{\mathfrak{I}}$, dann folgt sofort $\min((\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}}, \varphi^{\mathfrak{I}}) = ((\bigwedge \Gamma) \wedge \varphi)^{\mathfrak{I}} \leqslant \chi^{\mathfrak{I}}$. Falls $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} \leqslant \chi^{\mathfrak{I}}$, dann folgt wegen $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = \max(\varphi^{\mathfrak{I}}, \psi^{\mathfrak{I}})$, dass $\varphi^{\mathfrak{I}} \leqslant \chi^{\mathfrak{I}}$, also $\min((\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}}, \varphi^{\mathfrak{I}}) = ((\bigwedge \Gamma) \wedge \varphi)^{\mathfrak{I}} \leqslant \chi^{\mathfrak{I}}$.
In beiden Fällen folgt $((\bigwedge \Gamma) \wedge \varphi)^{\mathfrak{I}} \leqslant \chi^{\mathfrak{I}}$, also ist $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ allgemeingültig.

(b) Wir müssen eine allgemeinere Aussage zeigen, nämlich: wie man aus einer $\mathcal{SK}$-Ableitung von $\Gamma \vdash \Delta$ eine $\mathcal{SK}$-Ableitung von $\Gamma \vdash \Delta \cup \{\varphi\}$ macht.
Dies zeigen wir mit Induktion: Angenommen wir haben eine $\mathcal{SK}$-Ableitung von $\Gamma \vdash \Delta$, falls die letzte Regel ein Axiom war, dann ersetzen wir Δ durch $\Delta \cup \{\varphi\}$ (und erhalten wieder ein Axiom), anderfalls ersetzen wir alle Δ durch $\Delta \cup \{\varphi\}$ und benutzen die Induktionshypothese.

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi, \psi}\,(\mathrm{Ax})}{\varphi \vdash \varphi \vee \psi}\,(\vee\mathrm{R}) \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi}}{\Gamma, \varphi \vdash \chi}\,(\text{modus ponens})$$

(d) In $\mathcal{SK}$-Ableitungen kommen alle Formeln, die in einer Regel oben stehen im unteren Teil als ganzes oder Teilformel vor, demzufolge kann Regel (ii) (da wir nicht wissen, wie Γ, φ, ψ und χ aussehen) nicht herleitbar sein.

(H1.5)

(a) Weisen Sie die Korrektheit der folgenden Sequenzenregel nach:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \vartheta \quad \Gamma, \vartheta \vdash \Delta, \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}$$

(b) Leiten Sie die folgende Sequenz in $\mathcal{SK}$ ab:

$$\neg p \vee (q \wedge r),\ \neg q \vdash (\neg p \wedge r) \vee \neg(p \vee r)$$

Musterlösung.

(a) Angenommen, die Sequenzen $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \vartheta$ und $\Gamma, \vartheta \vdash \Delta, \psi$ sind allgemeingültig. Wir müssen zeigen, daß dann auch die Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi$ allgemeingültig ist.

Sei also $\mathfrak{J} \models \Gamma, \varphi$ ein Modell der linken Seite. Da $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \vartheta$ allgemeingültig ist, gibt es eine Formel $\delta \in \Delta \cup \{\vartheta\}$ mit $\mathfrak{J} \models \delta$. Wenn $\delta \in \Delta$ ist, dann sind wir fertig. Andernfalls gilt $\mathfrak{J} \models \Gamma, \vartheta$ und mit Hilfe der Allgemeingültigkeit der zweiten Sequenz folgt, daß es eine Formel $\eta \in \Delta \cup \{\psi\}$ gibt, mit $\mathfrak{J} \models \eta$.

(b)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$p \vdash p,\ q,\ \neg p \wedge r$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$p,\ r \vdash p,\ q$}
\UnaryInfC{$r \vdash p,\ q,\ \neg p$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$r \vdash p,\ q,\ r$}
\BinaryInfC{$r \vdash p,\ q,\ \neg p \wedge r$}
\BinaryInfC{$p \vee r \vdash p,\ q,\ \neg p \wedge r$}
\UnaryInfC{$\neg p, p \vee r \vdash q,\ \neg p \wedge r$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$q,\ r,\ p \vee r \vdash q,\ \neg p \wedge r$}
\UnaryInfC{$q \wedge r,\ p \vee r \vdash q,\ \neg p \wedge r$}
\BinaryInfC{$\neg p \vee (q \wedge r),\ p \vee r \vdash q,\ \neg p \wedge r$}
\UnaryInfC{$\neg p \vee (q \wedge r) \vdash q,\ \neg p \wedge r,\ \neg(p \vee r)$}
\UnaryInfC{$\neg p \vee (q \wedge r),\ \neg q \vdash \neg p \wedge r,\ \neg(p \vee r)$}
\UnaryInfC{$\neg p \vee (q \wedge r),\ \neg q \vdash (\neg p \wedge r) \vee \neg(p \vee r)$}
\end{prooftree}
$$

(H1.6) [Zusatzaufgabe (for fun)]

Lösen Sie das Rätsel auf der nächsten Seite (aus Lewis Carroll, *Symbolic Logic*, 1896)

(a) mit dem Resolutionskalkül.

(b) mit dem Sequenzenkalkül.

Hinweis: Arbeiten Sie z.B. mit Aussagenvariablen p_{xy} für $x, y \in \{a, b, c, d, e, h\} \cup \{A, B, C, D, E, H\}$ mit der Bedeutung „x ist in derselben Gruppe wie y"; hierbei steht etwa a für Mr Acres, A für Mrs Acres, etc.

Musterlösung.

(a) Wir formalisieren erst die Aussagen mit Hilfe der Aussagenvariablen p_{xy}:

1. $\varphi_1 := (p_{aA} \wedge p_{bB} \wedge p_{eH}) \rightarrow p_{cD}$
2. $\varphi_2 := (p_{aA} \wedge \varphi_{hH} \wedge p_{bC}) \rightarrow \neg p_{dE}$
3. $\varphi_3 := (p_{cC} \wedge p_{dD} \wedge p_{cD} \wedge \neg p_{aB}) \rightarrow \neg p_{eH}$
4. $\varphi_4 := (p_{aA} \wedge p_{dD} \neg p_{bC}) \rightarrow p_{eH}$
5. $\varphi_5 := (p_{eE} \wedge p_{hH} \wedge p_{cD}) \rightarrow \neg p_{aB}$
6. $\varphi_6 := (p_{bB} \wedge p_{cC} \wedge p_{bC} \wedge \neg p_{eH}) \rightarrow p_{dE}$
7. $\psi := \neg p_{aA} \vee \neg p_{bB} \vee \neg p_{cC} \vee \neg p_{dD} \vee \neg p_{eE} \vee \neg p_{hH}$

Zu zeigen ist, dass $\varphi_1, \ldots, \varphi_6 \vdash \psi$. Deshalb schreiben wir φ_1 bis φ_6 und $\neg\psi$ in Klauselform um:

1. $\{\{\neg p_{aA}, \neg p_{bB}, \neg p_{eH}, p_{cD}\}\}$
2. $\{\{\neg p_{aA}, \neg \varphi_{hH}, \neg p_{bC}, \neg p_{dE}\}\}$
3. $\{\{\neg p_{cC}, \neg p_{dD}, \neg p_{cD}, p_{aB}, \neg p_{eH}\}\}$
4. $\{\{\neg p_{aA}, \neg p_{dD}, p_{bC}, p_{eH}\}\}$
5. $\{\{\neg p_{eE}, \neg p_{hH}, \neg p_{cD}, \neg p_{aB}\}\}$
6. $\{\{\neg p_{bB}, \neg p_{cC}, \neg p_{bC}, p_{eH}, p_{dE}\}\}$
7. $\{\{p_{aA}\}, \{p_{bB}\}, \{p_{cC}\}, \{p_{dD}\}, \{p_{eE}\}, \{p_{hH}\}\}$

Ziel ist, die leere Klausel abzuleiten aus der Vereinigung der obenstehenden Klauselmengen.

Erstens können wir Resolution mit Klauseln aus 7 anwenden um die negierten Aussagen von der Form p_{xX} in 1–6 zu eliminieren. Also sind die folgenden Klauseln mit Resolution ableitbar:

1. $\{\neg p_{eH}, p_{cD}\}$
2. $\{\neg p_{bC}, \neg p_{dE}\}$
3. $\{\neg p_{cD}, p_{aB}, \neg p_{eH}\}$
4. $\{p_{bC}, p_{eH}\}$

5. $\{\neg p_{cD}, \neg p_{aB}\}$
6. $\{\neg p_{bC}, p_{eH}, p_{dE}\}$

Mit diesen Klauseln ist dann $\{\neg p_{eH}\}$ ableitbar:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg p_{eH}, p_{cD}\} \arrow[d] & \{\neg p_{cD}, \neg p_{aB}\} \arrow[dl] & & \\
\{\neg p_{eH}, \neg p_{aB}\} \arrow[dr] & & \{\neg p_{cD}, p_{aB}, \neg p_{eH}\} \arrow[dl] & \\
& \{\neg p_{eH}, \neg p_{cD}\} \arrow[dr] & & \{\neg p_{eH}, p_{cD}\} \arrow[dl] \\
& & \{\neg p_{eH}\} &
\end{tikzcd}$$

Und damit auch $\square$:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg p_{bC}, \neg p_{dE}\} \arrow[dr] & & \{\neg p_{bC}, p_{eH}, p_{dE}\} \arrow[dl] & \\
& \{\neg p_{bC}, p_{eH}\} \arrow[dr] & & \{p_{bC}, p_{eH}\} \arrow[dl] \\
\{\neg p_{eH}\} \arrow[dr] & & \{p_{eH}\} \arrow[dl] & \\
& \square & &
\end{tikzcd}$$

(b) Seien $\Gamma_0 = \{(p_{aA} \wedge p_{bB} \wedge p_{eH}) \to p_{cD}, (p_{aA} \wedge p_{hH} \wedge p_{bB}) \to p_{dE}, (p_{cC} \wedge p_{dD} \wedge p_{cD} \wedge \neg p_{aB}) \to \neg p_{eH}, (p_{aA} \wedge p_{dD} \wedge \neg p_{bC}) \to p_{eH}, (p_{eE} \wedge p_{hH} \wedge p_{cD}) \to \neg p_{aB}, (p_{bB} \wedge p_{cC} \wedge p_{bC} \wedge \neg p_{eH}) \to p_{dE}\}$, $\Gamma_1 = \{p_{aA}, p_{bB}, p_{cC}, p_{dD}, p_{eE}, p_{hH}\}$ und $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Es genügt zu zeigen, dass $\Gamma \vdash$ ableitbar ist, da hieraus mit wiederholter Anwendung von $(\neg R)$ die Sequenz $\Gamma_0 \vdash \neg p_{aA}, \neg p_{bB}, \ldots, \neg p_{hH}$ folgt und daraus wieder durch wiederholte Anwendung von $(\vee R)$ die Sequenz $\Gamma_0 \vdash \neg p_{aA} \vee \neg p_{bB} \vee \ldots \vee \neg p_{hH}$.

Durch Zusammensetzung der folgenden vier Ableitungen bekommt man die erwünschte Ableitung von $\Gamma \vdash$. Diese Ableitungen sind so zu verstehen:

(i) Die Ausdruck xy is eine verkürzte Schreibweise für die Aussagevariable p_{xY} (z.B. cd für p_{cD}).

(ii) Aussagen von der Form $xx \wedge yy$ sind einfach aus Γ_1 (und damit aus Γ) ableitbar, so Sequenzen von der Form $\Gamma \vdash xx \wedge yy$ können als Axiome behandelt werden.

(iii) Eine Situation die oft auftritt, ist, dass man $\Gamma \vdash \varphi, \Delta$ und $\Gamma, \psi \vdash \Delta$ ableitet, mit $\varphi \to \psi \in \Gamma$ (zur Erinnering: $\varphi \to \psi$ ist eine Abkürzung für $\neg\varphi \vee \psi$). Hieraus folgt $\Gamma \vdash \Delta$, wie folgt:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash \varphi, \Delta}}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta} \qquad \overline{\Gamma, \psi \vdash \Delta}}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta.}$$

Da $\Gamma = \Gamma \cup \{\varphi \to \psi\}$, haben wir hiermit auch $\Gamma \vdash \Delta$ abgeleitet. Diese Schritte werden wie folgt abgekürzt:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \in \Gamma \vdash \Delta.}$$

(iv) Die folgende abgeleitete Regel ("weakening")

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

ist oft implizit angewand worden in den $(\vee L)$ und $(\wedge R)$ Regeln um gleiche Kontexten zu erzwingen. So folgt z.B. mit "weakening" und der üblichen $(\wedge R)$-Regel, dass man die $(\wedge R)$-Regel auch so anwenden kann:

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Delta \qquad \Gamma' \vdash \varphi', \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \varphi \wedge \varphi', \Delta, \Delta'}.$$

Erstens leiten wir $\Gamma, cd, eh \vdash$ ab.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash ee \wedge hh} \qquad \overline{\Gamma, cd \vdash cd}}{\Gamma, cd \vdash ee \wedge hh \wedge cd} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash cc \wedge dd} \qquad \overline{\Gamma, cd \vdash cd}}{\Gamma, cd \vdash cc \wedge dd \wedge cd} \qquad \overline{\Gamma, \neg ab \vdash \neg ab}}{\Gamma, cd, \neg ab \vdash cc \wedge dd \wedge cd \wedge \neg ab} \qquad \dfrac{\overline{\Gamma, eh \vdash eh}}{\Gamma, eh, \neg eh \vdash}}{\Gamma, (cc \wedge dd \wedge cd \wedge \neg ab) \to \neg eh \in \Gamma, cd, \neg ab, eh \vdash}}{\Gamma, cd, (ee \wedge hh \wedge cd) \to \neg ab \in \Gamma, eh \vdash}$$

Daraus folgt dann $\Gamma, eh \vdash$:

$$\dfrac{\overline{\Gamma, cd, eh \vdash} \qquad \dfrac{\overline{\Gamma \vdash aa \wedge bb} \qquad \overline{\Gamma, eh \vdash eh}}{\Gamma, eh \vdash aa \wedge bb \wedge eh}}{\Gamma, (aa \wedge bb \wedge eh) \to cd \in \Gamma, eh \vdash}$$

Das können wir dann anwenden um $\mathit{\Gamma}, \mathit{\Delta} \vdash \neg p_{bC}$ abzuleiten:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathit{\Gamma}, \vdash bb \wedge cc} \qquad \dfrac{}{\mathit{\Gamma}, bc \vdash bc}}{\mathit{\Gamma}, bc \vdash bb \wedge cc \wedge bc} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathit{\Gamma}, eh \vdash}}{\mathit{\Gamma} \vdash \neg eh}}{\mathit{\Gamma}, bc \vdash bb \wedge cc \wedge bc \wedge \neg eh} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathit{\Gamma} \vdash aa \wedge hh} \qquad \dfrac{}{\mathit{\Gamma}, bc \vdash bc}}{\mathit{\Gamma}, bc \vdash aa \wedge hh \wedge bc} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathit{\Gamma}, de \vdash de}}{\mathit{\Gamma}, de, \neg de \vdash}}{\mathit{\Gamma}, (aa \wedge hh \wedge bc) \rightarrow \neg de \in \mathit{\Gamma}, bc, de \vdash}}{\mathit{\Gamma}, (bb \wedge cc \wedge bc \wedge \neg eh) \rightarrow de \in \mathit{\Gamma}, bc \vdash}}{\mathit{\Gamma} \vdash \neg bc}$$

Mit Hilfe der letzten zwei Ableitungen folgt dann $\mathit{\Gamma} \vdash$, wie erwünscht.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathit{\Gamma} \vdash aa \wedge dd} \qquad \dfrac{}{\mathit{\Gamma} \vdash \neg bc}}{\mathit{\Gamma} \vdash aa \wedge dd \wedge \neg bc} \qquad \dfrac{}{\mathit{\Gamma}, eh \vdash}}{\mathit{\Gamma}, (aa \wedge dd \wedge \neg bc) \rightarrow eh \in \mathit{\Gamma} \vdash}$$