Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E11.1)

Welche der folgenden Mengen sind entscheidbar, welche sind rekursiv aufzählbar?

(a) $\mathrm{SAT(AL)} := \{\varphi \in \mathrm{AL} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$

(b) $\{(\varphi, \psi) \in \mathrm{AL} : \varphi \models \psi\}$

(c) $\mathrm{SAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$

(d) $\mathrm{VAL(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ allgemeingültig}\}$

(e) $\mathrm{UNSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ unerfüllbar}\}$

(f) $\mathrm{FINSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ hat ein endliches Modell}\}$

(g) $\mathrm{INFSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ ist erfüllbar und hat nur unendliche Modelle}\}$

(h) $\{(\varphi, \psi) \in \mathrm{FO} : \varphi \models \psi\}$

(i) $\{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ hat Quantorenrang } 5\}$

(j) $\{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ ist äquivalent zu einer Formel von Quantorenrang } 5\}$

Musterlösung.

(a) entscheidbar

(b) entscheidbar

(c) nicht rekursiv aufzählbar

(d) rekursiv aufzählbar

(e) rekursiv aufzählbar

(f) rekursiv aufzählbar

(g) nicht rekursiv aufzählbar

(h) rekursiv aufzählbar

(i) entscheidbar

(j) rekursiv aufzählbar

(E11.2)

(a) Wir betrachten Wortmodelle $\mathcal{W} = (\{1, \dots, n\}, <, P_a, P_b)$ mit zwei Buchstaben. Bestimmen Sie durch Analyse von Ehrenfeucht-Fraïssé Spielen den minimalen Quantorenrang einer Formel, mit deren Hilfe die beiden folgenden Wörter unterschieden werden können:

$$a\,b\,a\,b\,a \qquad a\,b\,b\,a\,b\,a$$

(b) Wir betrachten Strukturen $\mathcal{A} = (A, P, Q)$ mit zwei einstelligen Relationen P und Q. Zeigen Sie, dass es keine FO-Formel φ gibt, so dass gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ und } Q \text{ haben gleich viele Elemente.}$$

(c) Zeigen Sie, dass es für Wortstrukturen $\mathcal{W} = (\{1, \dots, n\}, <, P_a, P_b)$ keine FO-Formel φ gibt, so dass gilt

$$\mathcal{W} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{W} \text{ enthält gleich viele } a \text{ wie } b.$$

(Beachten Sie, dass die Aussage aus (b) hieraus folgt.)

Musterlösung.

(a) Der minimale Quantorenrang ist 2. Eine Gewinnstrategie für Spieler I sieht wie folgt aus. Im ersten Zug wählt er das mittlere b des zweiten Wortes. Spieler II muß mit einem b aus dem ersten Wort antworten. Wählt er das erste b dann markiert Spieler I im zweiten Zug das erste b des zweiten Worts. Spieler II müsste mit einer Position antworten, die vor dem im ersten Zug gewählten b liegt und ebenfalls mit einem b beschriftet ist. Da eine solche Position nicht existiert, gewinnt Spieler I. Wenn Spieler II stattdessen im ersten Zug mit dem zweiten b antwortet, dann kann Spieler I analog das letzte b des zweiten Worts markieren. Spieler II müsste im ersten Wort ein b finden, das hinter dem zweiten b liegt. Er verliert also auch in diesem Fall.

(b) Angenommen, es gäbe so eine Formel φ. Sei m ihr Quantorenrang. Wir betrachten die Strukturen $\mathcal{A} = (A, P, Q)$ und $\mathcal{A}' = (A', P', Q')$ mit

$$\begin{aligned} A &:= \{1, \dots, 2m\}, & P &:= \{1, \dots, m\}, & Q &:= \{m+1, \dots, 2m\}, \\ A' &:= \{1, \dots, 2m+1\}, & P' &:= \{1, \dots, m\}, & Q' &:= \{m+1, \dots, 2m+1\}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{und} \quad \mathcal{A}' \not\models \varphi.$$

Andererseits gewinnt offensichtlich Spieler II das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $\mathcal{G}^m(\mathcal{A}; \mathcal{A}')$ mit m Runden (da Spieler I höchstens m Elemente aus Q bzw. Q' auswählen kann). Also sind $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{A}'$. Widerspruch.

(c) Wir modifizieren den Beweis aus (b). Angenommen, es gäbe so eine Formel φ mit Quantorenrang m. Wir betrachten die Wortstrukturen $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}'$ zu den Wörtern $a^{2^m}b^{2^m}$ und $a^{2^m}b^{2^m+1}$. Nach Voraussetzung gilt

$$\mathcal{W} \models \varphi \quad \text{und} \quad \mathcal{W}' \not\models \varphi\,.$$

Andererseits gilt wieder $\mathcal{W} \equiv_m \mathcal{W}'$, da Spieler II das Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel $\mathcal{G}^m(\mathcal{W};\mathcal{W}')$ mit m Runden gewinnt (siehe Lemma 8.14 im Skript).

(E11.3)

(a) Zeigen Sie mit dem Resolutionskalkül, dass die folgenden Formelmengen unerfüllbar sind:

(i) $\{\,(p \vee q) \to x, (x \vee y) \to z, p \vee q \vee y, \neg z\,\}$

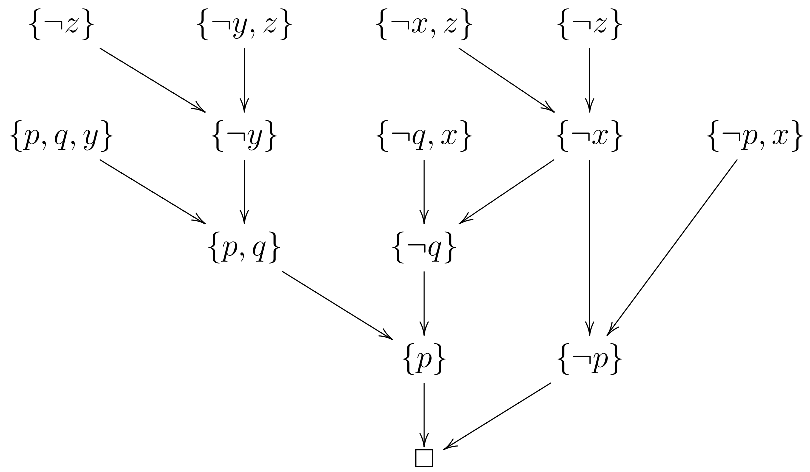
(ii) $\{\,\forall x\forall y\forall z(Rxy \vee Rxz \vee Ryz), \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),$
$\forall x\forall y(Rxy \to Rfxfy), \forall x\neg Rxffx\,\}$

(iii) $\{\,\forall x\forall y(Rxy \to (Px \wedge \neg Py)), \forall x\forall y(Rxy \to \exists z(Rxz \wedge Rzy)), \forall x Rxfx\,\}$

(b) Untersuchen Sie für jede der obigen Formelmengen, ob es auch echte Teilmengen gibt, die schon unerfüllbar sind.

Musterlösung.

(a) (i) Klauseln: $\{\neg p, x\}, \{\neg q, x\}, \{\neg x, z\}, \{\neg y, z\}, \{p, q, z\}, \{\neg z\}$



(ii) Klauseln: $\{Rxy, Rxz, Ryz\}$, $\{\neg Rxy, \neg Ryz, Rxz\}$, $\{\neg Rxy, Rfxfy\}$, $\{\neg Rxffx\}$

$$
\begin{tikzcd}
 & \{\neg Rxffx\} \arrow[dr] & \{\neg Rxfx, \neg Rfxffx, Rxffx\} \arrow[d] \\
\{\neg Rxfx, Rfxffx\} \arrow[dr] & & \{\neg Rxfx, \neg Rfxffx\} \arrow[dl] \\
\{Rxfx, Rxffx, Rfxffx\} \arrow[dr] & \{\neg Rxfx\} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & \{Rxffx, Rfxffx\} \arrow[d] & \{\neg Rfxffx\} \arrow[dl] \\
\{\neg Rxffx\} \arrow[dr] & \{Rxffx\} \arrow[d] & \\
 & \square &
\end{tikzcd}
$$

Oder:

$$
\begin{tikzcd}
 & \{Rxfx, Rxffx, Rfxffx\} \arrow[dr] & \{\neg Rxffx\} \arrow[d] \\
 & \{\neg Rxfx, Rfxffx\} \arrow[dr] & \{Rxfx, Rfxffx\} \arrow[d] \\
 & & \{Rfxffx\} \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
\{\neg Rfxffx, \neg Rffxfffx, Rfxfffx\} \arrow[dr] & \{Rffxfffx\} \arrow[d] & \\
 & \{\neg Rfxffx, Rfxfffx\} \arrow[dr] & \\
 & \{\neg Rfxfffx\} \arrow[dr] & \{Rfxfffx\} \arrow[d] \\
 & & \square
\end{tikzcd}
$$

(iii) Skolemnormalform für (ii): $\forall x \forall y (Rxy \to Rxg(x,y) \wedge Rg(x,y)y)$
Klauseln: $\{\neg Rxy, Px\}, \{\neg Rxy, \neg Py\}, \{\neg Rxy, Rxg(x,y)\}, \{\neg Rxy, Rg(x,y)y\}, \{Rxfx\}$

$$
\begin{tikzcd}
\{\neg Rxfx, \neg Pfx\} \arrow[dr] & \{Rxfx\} \arrow[d] & \{Rfxffx\} \arrow[d] & \{\neg Rfxffx, Pfx\} \arrow[dl] \\
 & \{\neg Pfx\} \arrow[d] & \{Pfx\} \arrow[dl] & \\
 & \square & &
\end{tikzcd}
$$

(b) Die Formelmengen in (i) und (ii) haben nur echte Teilmengen die erfüllbar sind (insbesondere ist $\{\, \forall x \forall y \forall z (Rxy \vee Rxz \vee Ryz), \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz), \forall x \neg Rxffx \,\}$

erfüllbar: wir nehmen z.B. die natürliche Zahlen als Trägermenge und interpretieren f als die Nachfolgerfunktion $f(x) = x + 1$ und R wie folgt:

$$(x, y) \in R \text{ gdw. } (x \in P \Leftrightarrow y \in P),$$

wobei $P = \{0, 1, 4, 5, 8, 9, \ldots\}$.)

In (iii) ist $\{\forall x \forall y (Rxy \to (Px \land \neg Py)), \forall x Rxfx\}$ schon unerfüllbar, wie wir oben gezeigt haben.

(E11.4)

Leiten Sie die folgenden Sequenzen in $\mathcal{SK}^+$ ab.

(a) $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \land Ryz) \to Rxz) \land \forall x \neg Rxx \vdash \forall x \forall y (Rxy \to \neg Ryx)$

(b) $\forall x \forall y fx = fy \vdash \exists x fx = x$

Musterlösung.

(a)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$Rcd, Rdc \vdash Rcc, Rcd$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$Rcd, Rdc \vdash Rcc, Rdc$}
\BinaryInfC{$Rcd, Rdc \vdash Rcc, Rcd \land Rdc$}
\UnaryInfC{$\neg(Rcd \land Rdc), Rcd, Rdc \vdash Rcc$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$Rcc, Rcd, Rdc \vdash Rcc$}
\BinaryInfC{$\neg(Rcd \land Rdc) \lor Rcc, Rcd, Rdc \vdash Rcc$}
\UnaryInfC{$\neg(Rcd \land Rdc) \lor Rcc, \neg Rcc, Rcd, Rdc \vdash \emptyset$}
\UnaryInfC{$\neg(Rcd \land Rdc) \lor Rcc, \neg Rcc, Rcd \vdash \neg Rdc$}
\UnaryInfC{$\neg(Rcd \land Rdc) \lor Rcc, \neg Rcc \vdash \neg Rcd, \neg Rdc$}
\UnaryInfC{$\forall z (\neg(Rcd \land Rdz) \lor Rcz), \neg Rcc \vdash \neg Rcd, \neg Rdc$}
\UnaryInfC{$\forall y \forall z (\neg(Rcy \land Ryz) \lor Rcz), \neg Rcc \vdash \neg Rcd, \neg Rdc$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y \forall z (\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz), \neg Rcc \vdash \neg Rcd, \neg Rdc$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y \forall z (\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz), \forall x \neg Rxx \vdash \neg Rcd, \neg Rdc$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y \forall z (\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz) \land \forall x \neg Rxx \vdash \neg Rcd, \neg Rdc$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y \forall z (\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz) \land \forall x \neg Rxx \vdash \neg Rcd \lor \neg Rdc$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y \forall z (\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz) \land \forall x \neg Rxx \vdash \forall y (\neg Rcy \lor \neg Ryc)$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y \forall z (\neg(Rxy \land Ryz) \lor Rxz) \land \forall x \neg Rxx \vdash \forall x \forall y (\neg Rxy \lor \neg Ryx)$}
\end{prooftree}
$$

(b)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$ffc = fc \vdash ffc = fc$}
\UnaryInfC{$\forall y ffc = fy \vdash ffc = fc$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y fx = fy \vdash ffc = fc$}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y fx = fy \vdash \exists x fx = x$}
\end{prooftree}
$$

(E11.5)

Wir betrachten ungerichtete Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$. Welche der folgenden Aussagen lassen sich durch eine Menge von FO-Formeln ausdrücken? Geben Sie eine entsprechende Formelmenge an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Der Abstand zwischen den Knoten x und y ist gerade (oder unendlich).

(b) $\mathcal{G}$ enthält keinen Kreis.

(c) $\mathcal{G}$ enthält einen Kreis.

(d) Jeder Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

(e) Kein Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

Musterlösung.

(a) Wir definieren zunächst eine Formel $\varphi_n(x,y)$, die besagt, dass es einen Pfad der Länge höchstens n von x nach y gibt:

$$\varphi_0(x,y) := x = y\,, \qquad \varphi_{n+1}(x,y) := \varphi_n(x,y) \vee \exists z(Exz \wedge \varphi_n(z,y))\,.$$

Die gesuchte Formelmenge ist:

$$\{\varphi_{2n+1}(x,y) \to \varphi_{2n}(x,y) \;:\; n \in \mathbb{N}\}.$$

(b)

$$\neg\exists x_1 \cdots \exists x_n \Big(\bigwedge_{i<k\leqslant n} x_i \neq x_k \wedge Ex_1x_2 \wedge \cdots \wedge Ex_{n-1}x_n \wedge Ex_nx_1 \Big)\,, \quad \text{für alle } n > 2\,.$$

(c) Diese Aussage läßt sich nicht durch eine Menge Φ von FO-Formeln ausdrücken. Angenommen, es gäbe eine solche Menge Φ. Dann ist die Menge

$$\Psi := \Phi \cup \{\neg\exists x_1 \cdots \exists x_n \big(\textstyle\bigwedge_{i<k\leqslant n} x_i \neq x_k \wedge Ex_1x_2 \wedge \cdots \wedge Ex_{n-1}x_n \wedge Ex_nx_1\big) \;:\; n > 2\}$$

unerfüllbar. Andererseits folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass Ψ doch erfüllbar ist. (Jede endliche Teilmenge ist in einem hinreichend großen Kreis erfüllt.) Widerspruch.

(d)

$$\forall x \exists y_1 \cdots \exists y_n \Big(\bigwedge_{i<k\leqslant n} y_i \neq y_n \wedge Exy_1 \wedge \cdots \wedge Exy_n)\,, \quad \text{für alle } n > 2\,.$$

(e) Diese Aussage läßt sich nicht durch eine Menge Φ von FO-Formeln ausdrücken. Angenommen, es gäbe eine solche Menge Φ. Dann ist die Menge

$$\Psi := \Phi \cup \{\forall x \exists y_1 \cdots \exists y_n \big(\textstyle\bigwedge_{i<k\leqslant n} y_i \neq y_k \wedge Exy_1 \wedge \cdots \wedge Exy_n\big) \;:\; n > 2\}$$

unerfüllbar. Andererseits folgt aus dem Kompaktheitssatz, dass Ψ doch erfüllbar ist. (Jede endliche Teilmenge ist in einem Baum von hinreichend großem Verzweigunsgrad erfüllt.) Widerspruch.