

10. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II SS 2008

(E10.1)

- (a) Für eine Klasse L von FO-Sätzen gelte die folgende „Endliche-Modell-Eigenschaft“:
Jeder erfüllbare Satz $\varphi \in L$ hat ein endliches Modell.

Argumentieren Sie, dass Erfüllbarkeit für Sätze aus L entscheidbar ist.

Hinweis: Man erinnere sich, dass eine Menge entscheidbar ist, falls man die Menge selbst und auch ihr Komplement aufzählen kann (warum?). Diesen Sachverhalt kann man für $\text{SAT}(L)$ und $L \setminus \text{SAT}(L)$ ausnutzen.

- (b) Zeigen Sie, dass Erfüllbarkeit für universell-pränexe FO-Sätze in einer Symbolmenge ohne Funktionssymbole (nur Relationen und Konstanten) entscheidbar ist.

Hinweis: Man überlege sich, zunächst für Sätze ohne Gleichheit, wie deren Herbrand-Modelle aussehen.

Musterlösung.

- (a) Sei $S(\varphi)$ die Signatur, die genau die Symbole enthält, die in einem Satz φ vorkommen. Offenbar ist $S(\varphi)$ stets endlich.

Um zu entscheiden ob φ erfüllbar ist, reicht es Modelle über $S(\varphi)$ zu betrachten. Damit ist $\text{SAT}(L)$ aufzählbar, weil für jeden Satz φ nur endlich viele Modelle einer festen Größe n gibt (es gibt nur endlich viele Möglichkeiten die Funktion-, Relationsymbole, Konstanten in $S(\varphi)$ zu belegen) und damit nach dem kleinsten n , so dass es ein Modell dieser Größe gibt, gesucht werden kann.

$\overline{\text{SAT}}(\text{FO})$ ist aufgrund des Vollständigkeitssatzes rekursiv aufzählbar. Man kann also für einen Kandidaten $\varphi \in L$ parallel nach einem endlichen Modell und nach einem Nachweis für die Unerfüllbarkeit von φ (d.h., die Allgemeingültigkeit von $\neg\varphi$) suchen. Aufgrund der „Endliche-Modell-Eigenschaft“ wird eine dieser Suchen schließlich fündig und zeigt an, ob φ erfüllbar ist oder nicht.

- (b) Universelle Sätze ohne Gleichheit sind genau dann erfüllbar, wenn sie ein Herbrand-Modell haben. Da die Signatur keine Funktionssymbole enthält, sind die einzigen Terme über $S(\varphi)$ die Konstanten, die in dem Satz φ vorkommen. Also ist jedes Herbrand-Modell endlich, d.h. die Klasse der universell-pränexen gleichheitsfreien Sätze ohne Funktionssymbole hat die „Endliche-Modell-Eigenschaft“ und das Problem ist nach (a) entscheidbar.

Bei Sätzen mit Gleichheit kann $=$ mit einem neuen Relationssymbol \sim eliminiert werden, so dass der Satz weiterhin universell-pränex bleibt. (Der Satz φ_{\sim} , der aussagt,

dass \sim eine Äquivalenzrelation ist, und die Sätze die aussagen, dass \sim mit allen Relationen verträglich ist, sind universell und gleichheitsfrei. Siehe Skript FO S.12.)

(E10.2)

Beweisen Sie die gegebene Folgerungsbeziehung sowohl im Sequenzkalkül als auch durch Resolution.

$$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \models \forall x \forall y \forall z \neg (Rxy \wedge Ryz)$$

Musterlösung.

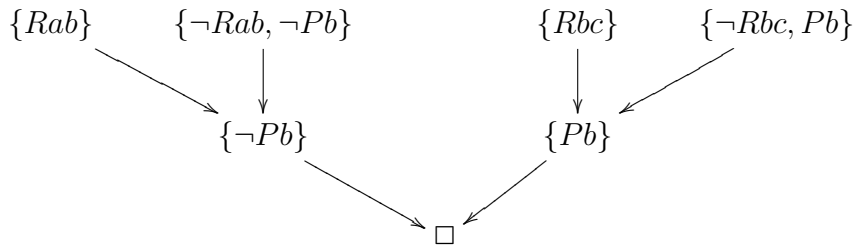
$Rab, Rbc, \neg Rab \vee (Pb \wedge \neg Pc) \vdash Rab$	$Rab, Rbc, Pa \wedge \neg Pb, \vdash Rbc$	$Rab, Rbc, Pa, Pb, \neg Pc \vdash Pb$
$Rab, Rbc, \neg Rab, \neg Rbc \vee (Pb \wedge \neg Pc) \vdash$	$Rab, Rbc, Pa \wedge \neg Pb, \neg Rbc \vdash$	$Rab, Rbc, Pa, \neg Pb, Pb, \neg Pc \vdash$
$Rab, Rbc, \neg Rab \vee (Pa \wedge \neg Pb), \neg Rbc \vee (Pb \wedge \neg Pc) \vdash$	$Rab, Rbc, Pa \wedge \neg Pb, \neg Rbc \vee (Pb \wedge \neg Pc) \vdash$	$Rab, Rbc, Pa, \neg Pb, Pb \wedge \neg Pc \vdash$
$Rab, Rbc, Rab \rightarrow (Pa \wedge \neg Pb), \forall y (Rby \rightarrow (Pb \wedge \neg Py)) \vdash$	$Rab, Rbc, Rab \rightarrow (Pa \wedge \neg Pb), \forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash$	$Rab, Rbc, \forall y (Ray \rightarrow (Pa \wedge \neg Py)), \forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash$
$Rab, Rbc, \forall y (Ray \rightarrow (Pa \wedge \neg Py)), \forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash$	$Rab \wedge Rbc, \forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash$	$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash \neg (Rab \wedge Rbc)$
$Rab, Rbc, \forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)), \forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash$	$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash \forall z \neg (Rab \wedge Rbz)$	$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash \forall y \forall z \neg (Ray \wedge Ryz)$
$Rab \wedge Rbc, \forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash$	$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \vdash \forall x \forall y \forall z \neg (Rxy \wedge Ryz)$	

Die Sequenz ist genau dann allgemeingültig, wenn

$$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow (Px \wedge \neg Py)) \wedge \neg \forall x \forall y \forall z \neg (Rxy \wedge Ryz)$$

nicht erfüllbar ist.

Der Satz liefert folgende Klauselmenge: $\{Rab\}, \{Rbc\}, \{\neg Rt_0 t_1, Pt_0\}, \{\neg Rt_0 t_1, \neg Pt_1\}$



(E10.3) (Zusatzaufgabe)

Sei $\mathcal{G} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, H, V, 0)$ die zweidimensionale Gitterstruktur auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit horizontaler und vertikaler Nachfolgerrelation H bzw. V und Konstante 0 für den Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Wir betrachten die Menge L aller universellen, gleichheitsfreien FO(S)-Sätze in der Symbolmenge $S = \{0, H, V\} \cup \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$, wobei $0, H, V$ wie oben sind, die P_i einstellige Relationssymbole.

Zeigen Sie dass das folgende Problem unentscheidbar ist:

Gegeben $\varphi \in L$, entscheide ob φ in einer Expansion von \mathcal{G} (d.h. mit geeigneter Interpretation der vorkommenden P_i) erfüllbar ist.

Hinweis: Man kann das Komplement des Halteproblems für DTM \mathcal{M} (vgl. FG 1, Kapitel 3.4) reduzieren auf die Erfüllbarkeit von Sätzen $\varphi_{\mathcal{M}}$, die die Berechnung von \mathcal{M} (mit Initialisierung durch leeres Band) anhand einer Färbung/Markierung des Gitters beschreiben. Bildlich assoziiert man etwa die Anfangskonfiguration mit einer geeigneten Färbung der Gitterzeile $\{(z, 0) : z \in \mathbb{Z}\}$ und beschreibt die sich ergebenden Nachfolgekonfigurationen anhand lokaler Bedingungen an die Färbungen aufeinander folgender Gitterzeilen. [Eine gewisse technische Schwierigkeit besteht darin, zu erzwingen, dass die Startzeile tatsächlich überall den Marker für leere Bandzellen trägt und den Marker für die aktuelle Kopfposition nur im Ursprung. Wie kann man das, etwa durch Verwendung von Hilfsmarkern, erreichen?]

Musterlösung.

Für die Kodierung des Laufs einer TM $(\mathcal{M}, \Sigma, Q, q_0, \delta, q^+, q^-)$ verwenden wir folgende 1-stellige Relationen (nach Vorgabe durch eine Auswahl der P_i zu ersetzen):

- P_b [Marker für Bandbeschriftung b für $b \in \Sigma \cup \{\square\}$]
- K [Marker für Kopfposition]
- $S_{q,b}$ [Marker für Zustand q und gelesenes Symbol b]
- P_{\square}^{\leftarrow} [Marker für Startzeile, links von 0]
- $P_{\square}^{\rightarrow}$ [Marker für Startzeile, rechts von 0]

Für $\varphi_{\mathcal{M}}$ nehmen wir die Konjunktion folgender Sätze. $\varphi_{\mathcal{M}}$ beschreibt wesentliche Eigenschaften einer Kodierung einer (divergierenden) Berechnung von \mathcal{M} auf leerem Input. Die intendierte Kodierung verwendet die einstelligen Marker um die Konfiguration C_n in Gitterzeile $\{(z, n) : z \in \mathbb{Z}\}$ wiederzugeben: Bandbeschriftung und Kopfposition werden durch die P_b und K kodiert, $S_{q,b}$ markiert die ganze n -te Zeile, falls in C_n der Kopf im Zustand q auf einer mit b beschrifteten Bandzelle steht.

Bandbeschriftung und Zustand eindeutig, $S_{q,b}$ konsistent mit K und P_b und zeilenweise konstant, Bandbeschriftung außerhalb Kopfposition konstant:

- (1) für $b \neq b'$: $\forall x \neg (P_b x \wedge P_{b'} x)$
- (2) für alle $(q, b) \neq (q', b')$: $\forall x \neg (S_{q,b} x \wedge S_{q',b'} x)$
- (3) für alle (q, b) : $\forall x \forall y (Hxy \rightarrow (S_{q,b} x \leftrightarrow S_{q,b} y)) \wedge \forall x ((S_{q,b} x \wedge Kx) \rightarrow P_b x)$
- (4) für alle b : $\forall x \forall y ((Vxy \wedge \neg Kx) \rightarrow (P_b x \leftrightarrow P_b y))$

Initialisierung in der Gitterzeile von 0:

- (5) $P_{\square} 0 \wedge K 0 \wedge S_{q_0, \square} 0$

$$(6) \forall x(H0x \rightarrow P_{\square}^{\rightarrow}x) \wedge \forall x\forall y((Hxy \wedge P_{\square}^{\rightarrow}x) \rightarrow P_{\square}^{\rightarrow}y)$$

$$(7) \forall x(Hx0 \rightarrow P_{\square}^{\leftarrow}x) \wedge \forall x\forall y((Hxy \wedge P_{\square}^{\leftarrow}y) \rightarrow P_{\square}^{\leftarrow}x)$$

$$(8) \forall x((P_{\square}^{\leftarrow}x \vee P_{\square}^{\rightarrow}x) \rightarrow (P_{\square}x \wedge \neg Kx))$$

Korrekte Nachfolgerkonfiguration (vgl. auch (4)):

$$(9) \text{ f\u00fcr jede \u00dcbergangsregel } \delta(q, b) = (b', d, q'):$$

$$\forall x\forall y((Vxy \wedge S_{q,b}x \wedge Kx) \rightarrow (P_{b'}y \wedge \bigvee_c S_{q',c}y))$$

$$(10) \text{ f\u00fcr jede \u00dcbergangsregel } \delta(q, b) = (b', d, q') \text{ mit } d = \circ:$$

$$\forall x\forall y((Vxy \wedge S_{q,b}x) \rightarrow (Kx \leftrightarrow Ky))$$

$$(11) \text{ f\u00fcr jede \u00dcbergangsregel } \delta(q, b) = (b', d, q') \text{ mit } d = \succ:$$

$$\forall x\forall y\forall z((Vxy \wedge Hyz \wedge S_{q,b}x) \rightarrow (Kx \leftrightarrow Kz))$$

$$(12) \text{ f\u00fcr jede \u00dcbergangsregel } \delta(q, b) = (b', d, q') \text{ mit } d = \prec:$$

$$\forall x\forall y\forall z((Vxy \wedge Hzy \wedge S_{q,b}x) \rightarrow (Kx \leftrightarrow Kz))$$

Berechnung nicht-terminierend ($\square \xrightarrow{\mathcal{M}} \infty$):

$$(13) \forall x \neg \bigvee_b (S_{q^+,b}x \vee S_{q^-,b}x)$$

Dann ist $\varphi_{\mathcal{M}}$ \u00fcber dem $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -Gitter erf\u00fcllbar gdw. $\square \xrightarrow{\mathcal{M}} \infty$. Also ist die Erf\u00fcllbarkeit von S\u00e4tzen der Form $\varphi_{\mathcal{M}}$ \u00fcber diesem Gitter unentscheidbar.

Bemerkung: Die Kodierung liefert gleichzeitig einen Hinweis, wie man die Unentscheidbarkeit von Parkettierungsproblemen zeigen kann.