Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

9. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E9.1)

(a) Leiten Sie die folgenden Sequenzen her:

(i) $\forall x Rxfx \vdash \exists x Rfxffx$

(ii) $\forall x \forall y (Rxy \vee Py),\ \exists x \neg Px \vdash \exists x \forall y Ryx$

(iii) $\forall x fxx = x \vdash \forall x (Px \vee \neg Pfxx)$

(b) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Regel:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \forall x Rxfx}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y Rxy}$$

Beachten Sie, daß sich diese Regel nicht in $\mathcal{SK}^{\neq}$ (auch nicht in $\mathcal{SK}$) herleiten läßt (warum?).

Musterlösung.

(a) (i)

$$\dfrac{\dfrac{Rfcffc \vdash Rfcffc}{\forall x Rxfx \vdash Rfcffc}}{\forall x Rxfx \vdash \exists x Rfxffx}$$

(ii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{Rac, \neg Pc \vdash Rac} \qquad \dfrac{\overline{Pc \vdash Pc}}{Pc, \neg Pc \vdash}}{Rac \vee Pc, \neg Pc \vdash Rac}}{\forall y (Ray \vee Py), \neg Pc \vdash Rac}}{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \neg Pc \vdash Rac}}{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \neg Pc \vdash \forall y Ryc}}{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \neg Pc \vdash \exists x \forall y Ryx}}{\forall x \forall y (Rxy \vee Py), \exists x \neg Px \vdash \exists x \forall y Ryx}$$

(iii)

$$
\begin{array}{c}
\overline{Pc \vdash Pc} \\
\hline
fcc = c, Pfcc \vdash Pc \\
\hline
\forall x fxx = x, Pfcc \vdash Pc \\
\hline
\forall x fxx = x \vdash Pc, \neg Pfcc \\
\hline
\forall x fxx = x \vdash Pc \vee \neg Pfcc \\
\hline
\forall x fxx = x \vdash \forall x(Px \vee \neg Pfxx)
\end{array}
$$

(b) Angenommen, $\Gamma \vdash \Delta, \forall x Rxfx$ ist allgemeingültig. Um zu zeigen, dass dann auch die Sequenz $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \exists y Rxy$ allgemeingültig ist, betrachten wir ein Modell $\mathfrak{J} \models \Gamma$. Nach Voraussetzung gibt es dann eine Formel $\delta \in \Delta \cup \{\forall x Rxfx\}$ mit $\mathfrak{J} \models \delta$. Falls $\delta \in \Delta$, so sind wir fertig. Falls $\mathfrak{J} \models \forall x Rxfx$, dann gilt auch $\mathfrak{J} \models \forall x \exists y Rxy$ und wir sind ebenfalls fertig.

(E9.2)

(a) Zeigen Sie, daß die folgenden Sequenzen ableitbar sind:

(i) $\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy$

(ii) $\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \forall x \psi$, vorausgesetzt, daß $x \notin \text{frei}(\psi)$.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit der folgenden Regel:

$$\frac{\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta, \psi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x(\varphi \to \psi)} \qquad \text{wobei } c \text{ nicht in } \Gamma, \Delta, \varphi, \psi \text{ vorkommt.}$$

(c) Was geht schief, wenn man in den Regeln ($\forall$R) und ($\exists$L) die Bedingung wegläßt, daß die Konstante nirgendwo vorkommt? Finden sie eine ungültige Sequenz, die man mit den liberaleren Regeln ableiten kann.

Musterlösung.

(a) (i)

$$
\begin{array}{c}
Rab \vdash Rab \\
\hline
\forall x Rxb \vdash Rab \\
\hline
\forall x Rxb \vdash \exists y Ray \\
\hline
\exists y \forall x Rxy \vdash \exists y Ray \\
\hline
\exists y \forall x Rxy \vdash \forall x \exists y Rxy
\end{array}
$$

(ii) Beachte, daß $\psi(c/x) = \psi$ ist, da $x \notin \text{frei}(\psi)$.

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\overline{\varphi(c/x) \vdash \varphi(c/x), \psi}\ (\text{Ax}) \qquad \overline{\psi \vdash \varphi(c/x), \psi}\ (\text{Ax})}{\varphi(c/x) \vee \psi \vdash \varphi(c/x), \psi}\ (\vee\text{L}) \\
\hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \varphi(c/x), \psi \quad (\forall\text{L}) \\
\hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \psi \quad (\forall\text{R}) \\
\hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi, \forall x \psi \quad (\forall\text{R}) \\
\hline
\forall x(\varphi \vee \psi) \vdash \forall x \varphi \vee \forall x \psi \quad (\vee\text{R})
\end{array}
$$

(b) Angenommen, die Sequenz $\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta, \psi(c/x)$ ist allgemeingültig. Wir müssen zeigen, daß dann auch die Sequenz $\Gamma \vdash \Delta, \forall x(\varphi \to \psi)$ algemeingültig ist. Sei also $\mathfrak{J} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine Interpretation mit $\mathfrak{J} \models \Gamma$. Falls $\mathfrak{J} \models \bigvee \Delta$, dann sind wir fertig. Angenommen, $\mathfrak{J} \not\models \bigvee \Delta$. Wir müssen zeigen, daß $\mathfrak{J} \models \forall x(\varphi \to \psi)$. Nehmen wir an, daß dies nicht der Fall ist. Dann gibt es ein Element $a \in A$, so daß $(\mathcal{A}, \beta[x \mapsto a]) \models \varphi \wedge \neg\psi$. Sei $\mathfrak{J}'$ die Interpretation, welche der Konstanten c den Wert a zuweist. Da c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi, \psi$ vorkommt, gilt

$$\mathfrak{J}' \models \bigwedge \Gamma\,, \quad \mathfrak{J}' \not\models \bigvee \Delta\,, \quad \mathfrak{J}' \models \varphi(c/x)\,, \quad \mathfrak{J}' \not\models \psi(c/x)\,.$$

Also ist $\mathfrak{J}'$ ein Gegenbeispiel zur Allgemeingültigkeit der Regel $\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta, \psi(c/x)$. Widerspruch.

(c)

$$\begin{array}{cl}
\overline{\varphi(c) \vdash \varphi(c)} & (\mathrm{Ax}) \\
\hline
\varphi(c) \vdash \forall x \varphi(x) & (\forall\mathrm{R}) \\
\hline
\exists x \varphi(x) \vdash \forall x \varphi(x) & (\exists\mathrm{L})
\end{array}$$