Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E8.1)

Seien R und E zweistellige Relationssymbole und Φ die Formelmenge:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \forall x Exx\,,\\
&(2)\quad \forall x \forall y (Exy \to Eyx)\,,\\
&(3)\quad \forall x \forall y \forall z ((Exy \wedge Eyz) \to Exz)\,,\\
&(4)\quad \forall x \forall y (\neg Exy \to \exists z (\neg Exz \wedge \neg Eyz \wedge Rxz \wedge \neg Ryz))\,,\\
&(5)\quad \forall x \forall y (Rxy \to Ryx)\,,\\
&(6)\quad \forall x \forall y (Exy \to \neg Rxy)\,,\\
&(7)\quad \forall x \exists y Rxy\,,\\
&(8)\quad \exists x \forall y (\neg Exy \to Rxy)\,.
\end{aligned}
$$

(a) (1)–(3) besagen, dass E eine Äquivalenzrelation ist. Was ist die anschauliche Bedeutung der Formeln (4)–(8), wenn man E als (Modellierung der) Gleichheit betrachtet? Können Sie ein kleinstmögliches Modell von (1)–(7) angeben?

(b) Wandeln Sie die Formeln aus Φ in Skolemnormalform um.

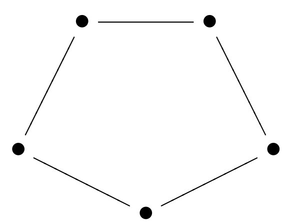
(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Φ unerfüllbar ist.

Musterlösung.

(a) (4)–(7) besagen, dass R die Kantenrelation eines ungerichteten Graphen ist, so dass jeder Knoten einen Nachbarn hat und es zu je zwei verschiedenen Elementen x und y ein z gibt, welches verschieden von x und y und mit x aber nicht mit y verbunden ist.

(8) sagt aus, dass mindestens ein Knoten mit allen anderen verbunden ist.

Kleinstes Modell:



(b)

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \forall x Exx\,,\\
&(2) \quad \forall x \forall y (Exy \to Eyx)\,,\\
&(3) \quad \forall x \forall y \forall z ((Exy \wedge Eyz) \to Exz)\,,\\
&(4) \quad \forall x \forall y (\neg Exy \to (\neg Exfxy \wedge \neg Eyfxy \wedge Rxfxy \wedge \neg Ryfxy))\,,\\
&(5) \quad \forall x \forall y (Rxy \to Ryx)\,,\\
&(6) \quad \forall x \forall y (Exy \to \neg Rxy)\,,\\
&(7) \quad \forall x Rxgx\,,\\
&(8) \quad \forall y (\neg Ecy \to Rcy)\,.
\end{aligned}
$$

(c) Klauseln:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad \{Ett\}\,,\\
&(2) \quad \{\neg Et_0t_1, Et_1t_0\}\,,\\
&(3) \quad \{\neg Et_0t_1, \neg Et_1t_2, Et_0t_2\}\,,\\
&(4) \quad \{Et_0t_1, \neg Et_0ft_0t_1\}, \{Et_0t_1, \neg Et_1ft_0t_1\}, \{Et_0t_1, Rt_0ft_0t_1\}, \{Et_0t_1, \neg Rt_1ft_0t_1\}\,,\\
&(5) \quad \{\neg Rt_0t_1, Rt_1t_0\}\,,\\
&(6) \quad \{\neg Et_0t_1, \neg Rt_0t_1\}\,,\\
&(7) \quad \{Rtgt\}\,,\\
&(8) \quad \{Ect, Rct\}\,.
\end{aligned}
$$

Erst leiten wir $\{\neg Egcc\}$ ab:

$$
\begin{tikzcd}
\{Rcgc\} \arrow[d] & \{\neg Ecgc, \neg Rcgc\} \arrow[dl] \\
\{\neg Ecgc\} \arrow[d] & \{\neg Egcc, Ecgc\} \arrow[dl] \\
\{\neg Egcc\} &
\end{tikzcd}
$$

Und damit dann auch die leere Klausel:

$$
\begin{tikzcd}
\{\neg Egcc\} \arrow[dr] & \{Egcc, \neg Ecfgcc\} \arrow[d] & & \\
\{Ecfgcc, Rcfgcc\} \arrow[dr] & \{\neg Ecfgcc\} \arrow[d] & \{\neg Egcc\} \arrow[d] & \{Egcc, \neg Rcfgcc\} \arrow[dl] \\
& \{Rcfgcc\} \arrow[dr] & \{\neg Rcfgcc\} \arrow[d] & \\
& & \square &
\end{tikzcd}
$$

(E8.2)

Wir betrachten die Signatur $S = \{f, 0\}$ mit einem einstelligen Funktionssymbol f und einer Konstanten 0. Beginnend mit einem Element x einer S-Struktur betrachten wir die Folge $x, f(x), f^2(x), \dots$ und untersuchen, wie lange es dauert bis der Wert 0 erreicht wird.

(a) Geben Sie für jedes $n > 0$ eine Formel $\varphi_n(x)$ an, die sagt, dass in der Folge $x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)$ der Wert 0 nicht vorkommt.

(b) Geben Sie eine Satzmenge Φ an, welche besagt, dass es für jedes $n > 0$ ein x gibt, so dass, wenn wir mit x beginnen, der Wert 0 frühestens nach n Schritten erreicht.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es keine Satzmenge Φ gibt, welche ausdrückt, dass für jedes x schließlich die 0 erreicht wird, d. h., dass es kein x gibt, so dass $f^n(x) \neq 0$ für alle n.

(Die Collatz-Vermutung behauptet, dass die durch die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) := \begin{cases} 3n+1 & \text{für ungerade } n\,, \\ n/2 & \text{für gerade } n\,, \end{cases}$$

erzeugte Folge für jede natürliche Zahl > 0 schließlich 1 ergibt. Bis jetzt konnte diese Vermutung weder bewiesen noch widerlegt werden.)

Musterlösung.

(a) $\varphi_n(x) := \bigwedge_{i<n} \neg(f^i x = 0)$.

(b) $\Phi := \{\, \exists x\, \varphi_n(x) \;:\; n > 0 \,\}$.

(c) Angenommen es gäbe eine Satzmenge Φ mit der gewünschten Eigenschaft. Sei c ein neues Konstantensymbol. Wir definieren

$$\Psi := \Phi \cup \{\, \varphi_n(c) \;:\; n > 0 \,\}\,.$$

Diese Menge ist unerfüllbar, da es in jedem Model $(A, f, 0, c) \models \Psi$ eine Zahl n geben muss, so dass $f^n(c) = 0$ ist. Dies widerspricht aber $\varphi_{n+1}(c)$.

Nach dem Kompaktheitssatz gibt es also eine endliche Teilmenge $\Psi_0 \subseteq \Psi$, welche unerfüllbar ist. Sei m eine Zahl, so dass

$$\Psi_0 \subseteq \Phi \cup \{\, \varphi_n(c) \;:\; 0 < n < m \}\,.$$

Die Struktur $(\mathbb{N}, f, 0, m)$ mit $f(0) = 0$ und $f(x) = x - 1$ für $x > 0$ ist ein Modell von Ψ_0. Widerspruch.