

7. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II SS 2008

(E7.1)

Seien

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \forall x \neg Rxx \\ \varphi_2 &:= \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx) \\ \varphi_3 &:= \forall x (Rxfx \wedge Rxffx) \\ \varphi_4 &:= \exists x \exists y \exists z (Rxy \wedge Ryz \wedge Rxz)\end{aligned}$$

Wir wollen mit Resolution zeigen, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \varphi_4$.

- (a) Bestimmen Sie eine Menge von aussagenlogische Formeln, die genau dann erfüllbar ist, wenn $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ das ist.
- (b) Übersetzen Sie das Ergebnis aus (a) in Klauselform und beweisen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, daß die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ unerfüllbar ist.
Hinweis. Überlegen Sie sich zu erst intuitiv, warum die Formelmenge nicht erfüllbar sein kann.
- (c) Seien

$$\begin{aligned}\psi_1 &:= \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y \wedge Pz)) \\ \psi_2 &:= \exists x \forall y (y < x \rightarrow \neg Py) \\ \psi_3 &:= \exists x \forall y (\neg y < x)\end{aligned}$$

Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass $\psi_1, \psi_2 \models \psi_3$. Wandeln Sie dazu erst die Formeln $\psi_1, \psi_2, \neg\psi_3$ in Skolemnormalform um.

Musterlösung.

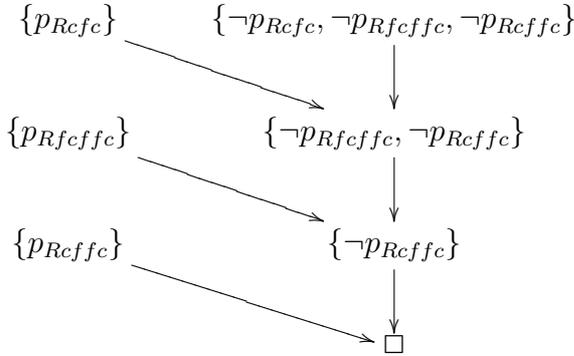
- (a) Erstens schreiben wir die Negation von φ_4 in pränex Normalform um: $\neg\varphi_4 \equiv \forall x \forall y \forall z \neg (Rxy \wedge Ryz \wedge Rxz)$. Damit sind alle Formeln in Skolem Normalform und wir bekommen die Termstruktur $\{f^n c : n \in \mathbb{N}\}$.

Für alle Terme s und t führen wir Aussagenvariablen p_{Rst} ein und erhalten die Formeln

$$\begin{aligned}\neg p_{Rtt}, \\ p_{Rst} \rightarrow p_{Rts}, \\ p_{Rsft} \wedge p_{Rsfft}, \\ \neg(p_{Rst} \wedge p_{Rtu} \wedge p_{Rsu}).\end{aligned}$$

(b) Es ergeben sich die Klauseln

$$\begin{aligned} & \{\neg p_{Rtt}\}, \\ & \{\neg p_{Rst}, p_{Rts}\}, \\ & \{p_{Rtft}\}, \{p_{Rtfft}\}, \\ & \{\neg p_{Rst}, \neg p_{Rtu}, \neg p_{Rsu}\}. \end{aligned}$$



(c) Wir schreiben $\psi_1, \psi_2, \neg\psi_3$ in Skolemnormalform um und führen dazu ein zweistelliges Funktionssymbol f , ein einstelliges Funktionssymbol g und ein Konstantensymbol c ein.

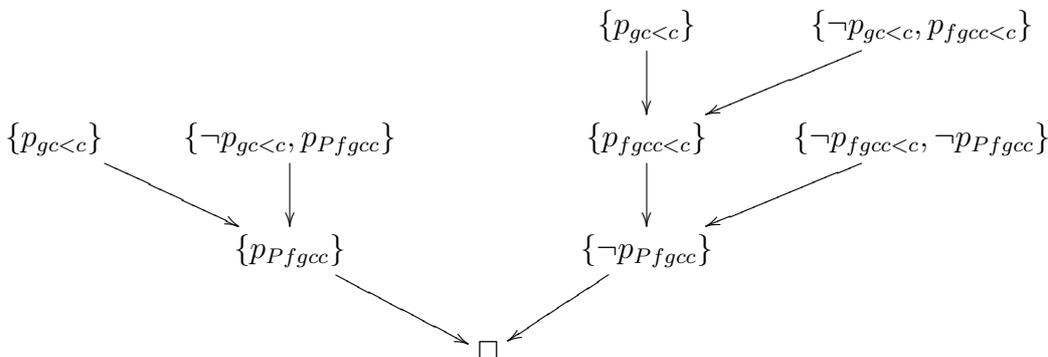
$$\begin{aligned} & \forall x \forall y (x < y \rightarrow (x < fxy \wedge fxy < y \wedge Pfy)) \\ & \forall y (y < c \rightarrow \neg Py) \\ & \forall x (gx < x) \end{aligned}$$

Für alle Terme s und t führen wir Aussagenvariablen $p_{s<t}$ und p_{Pt} ein und erhalten die Formeln

$$\begin{aligned} & p_{s<t} \rightarrow (p_{s<fst} \wedge p_{fst<t} \wedge p_{Pfst}), \\ & p_{t<c} \rightarrow \neg p_{Pt}, \\ & p_{gt<t}. \end{aligned}$$

Es ergeben sich die Klauseln

$$\{\neg p_{s<t}, p_{s<fst}\}, \{\neg p_{s<t}, p_{fst<t}\}, \{\neg p_{s<t}, p_{Pfst}\}, \{\neg p_{t<c}, \neg p_{Pt}\}, \{p_{gt<t}\}.$$



(E7.2)

Gegeben sei eine zweistellige Relation \sim und die Aussage

$$\varphi \equiv \forall x x \sim x \wedge \forall x \forall y (x \sim y \rightarrow y \sim x) \wedge \forall x \forall y \forall z ((x \sim y \wedge y \sim z) \rightarrow x \sim z)$$

die besagt, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

- (a) Erweitern Sie $\{\varphi\}$ zu einer Satzmenge, die besagt, dass \sim unendlich viele Äquivalenzklassen hat.
- (b) Argumentieren Sie (mit dem Kompaktheitssatz), dass es keine Satzmenge gibt, die besagt, dass \sim endlich viele Äquivalenzklassen hat.
- (c) Schließen Sie aus (b), dass es keinen *einzelnen* Satz gibt, der besagt, dass \sim unendlich viele Äquivalenzklassen hat.

Musterlösung.

- (a) Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\varphi_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i \sim x_j$$

(φ_n besagt, dass \sim mindestens n verschiedene Äquivalenzklassen hat), dann erfüllt die Satzmenge

$$\Phi = \{\varphi\} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$$

die geforderte Bedingung.

- (b) Angenommen es gäbe eine solche Formelmengemenge Ψ . Ist Γ eine endliche Teilmenge von $\Phi \cup \Psi$, dann enthält Γ höchstens endlich viele Sätze der Form φ_n , und demzufolge gibt es ein maximales $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n \in \Gamma$. Also ist jede Äquivalenzrelation mit n Klassen ein Modell für Γ . Nach dem Kompaktheitssatz wäre nun $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar, was aber nicht sein kann, da ein Modell von $\Phi \cup \Psi$ höchstens endlich viele und gleichzeitig unendlich viele Äquivalenzklassen haben müsste.
- (c) Gäbe es einen einzelnen Satz χ , dann würde der Satz $\varphi \wedge \neg \chi$ gerade besagen, dass \sim endlich viele Klassen hat, eine solche Menge kann aber laut (b) nicht existieren. (Beachten Sie: Aus φ folgt, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist, während aus $\neg \chi$ folgt, dass \sim keine Äquivalenzrelation ist oder endlich viele Klassen hat.)