Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E7.1)

Seien

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \forall x \neg Rxx \\
\varphi_2 &:= \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx) \\
\varphi_3 &:= \forall x (Rxfx \wedge Rxffx) \\
\varphi_4 &:= \exists x \exists y \exists z (Rxy \wedge Ryz \wedge Rxz)
\end{aligned}$$

Wir wollen mit Resolution zeigen, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \varphi_4$.

(a) Bestimmen Sie eine Menge von aussagenlogische Formeln, die genau dann erfüllbar ist, wenn $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ das ist.

(b) Übersetzen Sie das Ergebnis aus (a) in Klauselform und beweisen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, daß die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ unerfüllbar ist.

Hinweis. Überlegen Sie sich zu erst intuitiv, warum die Formelmenge nicht erfüllbar sein kann.

(c) Seien

$$\begin{aligned}
\psi_1 &:= \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y \wedge Pz)) \\
\psi_2 &:= \exists x \forall y (y < x \rightarrow \neg Py) \\
\psi_3 &:= \exists x \forall y (\neg y < x)
\end{aligned}$$

Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass $\psi_1, \psi_2 \models \psi_3$. Wandeln Sie dazu erst die Formeln $\psi_1, \psi_2, \neg\psi_3$ in Skolemnormalform um.

Musterlösung.

(a) Erstens schreiben wir die Negation von φ_4 in pränexe Normalform um: $\neg\varphi_4 \equiv \forall x \forall y \forall z \neg (Rxy \wedge Ryz \wedge Rxz)$. Damit sind alle Formeln in Skolem Normalform und wir bekommen die Termstruktur $\{f^n c : n \in \mathbb{N}\}$.

Für alle Terme s und t führen wir Aussagenvariablen p_{Rst} ein und erhalten die Formeln

$$\begin{aligned}
&\neg p_{Rtt}, \\
&p_{Rst} \rightarrow p_{Rts}, \\
&p_{Rsft} \wedge p_{Rsfft}, \\
&\neg (p_{Rst} \wedge p_{Rtu} \wedge p_{Rsu}).
\end{aligned}$$

(b) Es ergeben sich die Klauseln

$$\begin{aligned}
&\{\neg p_{Rtt}\},\\
&\{\neg p_{Rst}, p_{Rts}\},\\
&\{p_{Rtft}\}, \{p_{Rtfft}\},\\
&\{\neg p_{Rst}, \neg p_{Rtu}, \neg p_{Rsu}\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\{p_{Rcfc}\} \arrow[dr] & \{\neg p_{Rcfc}, \neg p_{Rfcffc}, \neg p_{Rcffc}\} \arrow[d] \\
\{p_{Rfcffc}\} \arrow[dr] & \{\neg p_{Rfcffc}, \neg p_{Rcffc}\} \arrow[d] \\
\{p_{Rcffc}\} \arrow[dr] & \{\neg p_{Rcffc}\} \arrow[d] \\
 & \square
\end{tikzcd}$$

(c) Wir schreiben $\psi_1, \psi_2, \neg\psi_3$ in Skolemnormalform um und führen dazu ein zweistelliges Funktionssymbol f, ein einstelliges Funktionssymbol g und ein Konstantensymbol c ein.

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y (x < y \to (x < fxy \wedge fxy < y \wedge Pfxy))\\
&\forall y (y < c \to \neg P y)\\
&\forall x (gx < x)
\end{aligned}$$

Für alle Terme s und t führen wir Aussagenvariablen $p_{s<t}$ und p_{Pt} ein und erhalten die Formeln

$$\begin{aligned}
&p_{s<t} \to (p_{s<fst} \wedge p_{fst<t} \wedge p_{Pfst})\,,\\
&p_{t<c} \to \neg p_{Pt}\,,\\
&p_{gt<t}\,.
\end{aligned}$$

Es ergeben sich die Klauseln

$$\{\neg p_{s<t}, p_{s<fst}\},\ \{\neg p_{s<t}, p_{fst<t}\},\ \{\neg p_{s<t}, p_{Pfst}\},\ \{\neg p_{t<c}, \neg p_{Pt}\},\ \{p_{gt<t}\}\,.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \{p_{gc<c}\} \arrow[d] & \{\neg p_{gc<c}, p_{fgcc<c}\} \arrow[dl] \\
\{p_{gc<c}\} \arrow[dr] & \{\neg p_{gc<c}, p_{Pfgcc}\} \arrow[d] & & \{p_{fgcc<c}\} \arrow[d] & \{\neg p_{fgcc<c}, \neg p_{Pfgcc}\} \arrow[dl] \\
 & \{p_{Pfgcc}\} \arrow[dr] & & \{\neg p_{Pfgcc}\} \arrow[dl] & \\
 & & \square & &
\end{tikzcd}$$

(E7.2)

Gegeben sei eine zweistellige Relation $\sim$ und die Aussage

$$\varphi \equiv \forall x\, x \sim x \;\wedge\; \forall x \forall y (x \sim y \to y \sim x) \;\wedge\; \forall x \forall y \forall z ((x \sim y \wedge y \sim z) \to x \sim z)$$

die besagt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(a) Erweitern Sie $\{\varphi\}$ zu einer Satzmenge, die besagt, dass $\sim$ unendlich viele Äquivalenzklassen hat.

(b) Argumentieren Sie (mit dem Kompaktheitssatz), dass es keine Satzmenge gibt, die besagt, dass $\sim$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

(c) Schließen Sie aus (b), dass es keinen *einzelnen* Satz gibt, der besagt, dass $\sim$ unendlich viele Äquivalenzklassen hat.

Musterlösung.

(a) Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\varphi_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i \sim x_j$$

(φ_n besagt, dass $\sim$ mindestens n verschiedene Äquivalenzklassen hat), dann erfüllt die Satzmenge

$$\Phi = \{\varphi\} \cup \{\varphi_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

die geforderte Bedingung.

(b) Angenommen es gäbe eine solche Formelmenge Ψ. Ist Γ eine endliche Teilmenge von $\Phi \cup \Psi$, dann enthält Γ höchstens endlich viele Sätze der Form φ_n, und demzufolge gibt es ein maximales $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n \in \Gamma$. Also ist jede Äquivalenzrelation mit n Klassen ein Modell für Γ. Nach dem Kompaktheitssatz wäre nun $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar, was aber nicht sein kann, da ein Modell von $\Phi \cup \Psi$ höchstens endlich viele und gleichzeitig unendlich viele Äquivalenzklassen haben müsste.

(c) Gäbe es einen einzelnen Satz χ, dann würde der Satz $\varphi \wedge \neg\chi$ gerade besagen, dass $\sim$ endlich viele Klassen hat, eine solche Menge kann aber laut (b) nicht existieren. (Beachten Sie: Aus φ folgt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, während aus $\neg\chi$ folgt, dass $\sim$ keine Äquivalenzrelation ist oder endlich viele Klassen hat.)