Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E6.1)

Ein Meteorologe versucht die zeitliche Entwicklung des Wetters an einem bestimmten Ort mit folgender Signatur in FO zu beschreiben:

$$S = \{0, N, <, S, R\}.$$

0	Konstante für Starttag
N	1-stelliges Funktionssymbol für „nächster Tag“
$<$	2-stelliges Relationssymbol für die zeitliche Ordnung der Tage
S, R	1-stellige Relationssymbole für Sonne und Regen

(a) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO(S):

  (i) Auf Regen folgt Sonnenschein.

  (ii) Jeden zweiten Tag scheint die Sonne.

  (iii) Wenn an einem Tag die Sonne scheint, gibt es innerhalb drei Tagen wieder Regen.

  (iv) Regen dauert nie länger als drei Tage.

  (v) Innerhalb einer Periode von vier Tagen regnet es an mindestens zwei Tagen.

(b) Schreiben Sie Ihre Lösungen in (a) in pränexe Normalform um.

(c) Führen Sie folgende Substitutionen durch und umschreiben Sie die Bedeutung der entstandenen Formeln in Worten.

  (i) $\big[\exists y\, x < y \wedge Sy\big](NN0/x)$

  (ii) $\big[\forall x \exists y\, x < y \wedge Sy\big](NNN0/x)$

  (iii) $\big[x < y\big](NNz/x)(Nx/y)(NNNy/z)$

  (iv) $\big[Sy \rightarrow \forall x\, (x < y \rightarrow Rx)\big](Nx/y)$

(d) Extra: N kann eliminiert werden. Wie können Sie jede Formel logisch äquivalent umformulieren in eine Formel ohne N?

Musterlösung.

(a) Wir geben eine mögliche Lösung an (offenbar sid (i)-(v) nicht unbedingt eindeutig in ihrer Semantik!).

(i) $\forall x\,(Rx \to \exists y\,(x < y \wedge Sy))$

(ii) $\forall x\,(Sx \vee SNx)$

(iii) $\forall x\,(Sx \to (RNx \vee RNNx \vee RNNNx))$

(iv) $\neg\exists x\,(Rx \wedge RNx \wedge RNNx \wedge RNNNx)$

(v) $\forall x \bigvee_{i,j<4,i\neq j}(RN^i x \wedge RN^j x)$

(b) Die Formeln in (ii), (iii) und (v) sind schon in pränexer Normalform. Die Formel in (i) ist äquivalent zu $\forall x\exists y\,(Rx \to (x < y \wedge Sy))$ und die Formel in (iv) zu $\forall x\,\neg(Rx \wedge RNx \wedge RNNx \wedge RNNNx)$.

(c) (i) $\big[\exists y\, x < y \wedge Sy\big](NN0/x) \equiv \big[\exists y\, NN0 < y \wedge Sy\big]$: nach dem zweiten Tag gibt es mindestens einmal Sonne.

(ii) $\big[\forall x\exists y\, x < y \wedge Sy\big](NNN0/x) \equiv \big[\forall x\exists y\, x < y \wedge Sy\big]$: auf jeden Tag folgt ein Tag mit Sonnenschein.

(iii) $\big[x < y\big](NNz/x)(Nx/y)(NNNy/z) \equiv \big[NNz < y\big](Nx/y)(NNNy/z) \equiv \big[NNz < Nx\big](NNNy/z) \equiv \big[NNNNNy < Nx\big]$: Tag x ist mindestens 5 Tagen später als Tag y.

(iv) $\big[Sy \to \forall x\,(x < y \to Rx)\big](Nx/y) \equiv \big[Sy \to \forall u\,(u < y \to Ru)\big](Nx/y) \equiv \big[SNx \to \forall u\,(u < Nx \to Ru)\big]$: wenn an dem Tag der auf x folgt die Sonne scheint, dann hat es bis dann geregnet.

(d) Wenn N in einer Termgleichheit vorkommt, wie $Ns = t$, dann können wir dieses N eliminieren:

$$Ns = t \equiv \big[s < t \wedge \neg\exists z\,(s < z \wedge z < t)\big].$$

Deshalb genügt es zu zeigen, dass wir erreichen können, dass alle Terme von der Form Ns nur in Termgleichheiten vorkommen. Dazu betrachten wir Formeln φ die Terme von der Form Ns enthalten als Substitutionsinstanzen $\varphi = \psi(Ns/x)$ wobei x nicht in φ vorkommt und verwenden:

$$\psi(Ns/x) \equiv \exists x(\psi \wedge x = Ns).$$

Durch wiederholter Anwendung dieser beiden Äquivalenzen können wir erreichen, dass alle N-Symbole eliminiert werden.

(E6.2)

Betrachten Sie die folgenden universellen, gleichheitsfreien Sätze für 1-stellige Funktionssymbole h und v:

(1) $\forall x, y, z\,(x \sim x \wedge (x \sim y \to y \sim x) \wedge (x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z))$

(2) $\forall x\,(h(v(x)) \sim v(h(x)))$

(3) $\forall x, y\,(x \sim y \to (h(x) \sim h(y) \wedge v(x) \sim v(y))$

Bemerkung: Man kann sich vorstellen, dass h und v als Skolemfunktionen für

$$\forall x\,(\exists y\, Hxy \wedge \exists y\, Vxy)$$

eingeführt wurden, und dass $\sim$ als Kongruenzrelation anstelle von $=$ fungiert um mit (2) auszudrücken, dass h und v kommutieren. Was bedeutet das für H und V?

(a) Sei $\mathcal{H} = (\mathcal{T}, h^{\mathcal{H}}, v^{\mathcal{H}}, \sim^{\mathcal{H}})$ eine Herbrand-Struktur. Beschreiben Sie die Trägermenge $\mathcal{T}$.

(b) Man kann die Teilmenge $\sim^{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ so wählen, dass die Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ ein Modell von (1–3) wird. Geben Sie die minimale und die maximale Lösung an. Gibt es auch noch andere Möglichkeiten?

Musterlösung.

(a) Da die Signatur keine Konstanten enthält, nehmen wir ein Konstantensymbol c zu $h, v, \sim$ hinzu. Die Trägermenge ist $\mathcal{T} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$, wobei $T_0 = \{c\}$ und $T_{i+1} = \{h(t), v(t) \ : \ t \in T_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (d.h. einen Baum, wobei jeder Knoten genau zwei Nachfolger hat).

(b) Die Relation $\sim$ kann z.B. durch $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ (die maximale Lösung) oder wie folgt interpretiert werden:

$$s \sim t \Leftrightarrow \text{sowohl } v \text{ als } h \text{ kommen in } s \text{ und } t \text{ gleich oft vor}$$

(die minimale Lösung). Es gibt noch viele andere Lösungen, z.B.:

$$s \sim t \Leftrightarrow v \text{ kommt in } s \text{ und } t \text{ gleich oft vor}$$

(E6.3)

(a) Geben Sie für folgende FO-Formeln jeweils eine Skolemnormalform an:

(i) $\forall x \exists y Rxy$

(ii) $\forall x(\forall y Ryy \rightarrow \exists y Ryf(x))$

(b) Geben Sie einige verschiedene Herbrandmodelle für die Skolemnormalformen aus (a) an.

Musterlösung.

(a) Wir geben jeweils eine mögliche Lösung an:

(i) $\forall x Rxs(x)$

(ii)

$$\begin{aligned}
\forall x(\forall y Ryy \rightarrow \exists y Ryf(x)) &\equiv \forall x(\neg \forall y Ryy \vee \exists y Ryf(x)) \\
&\equiv \forall x(\exists y \neg Ryy \vee \exists y Ryf(x)) \\
&\equiv \forall x(\exists z \neg Rzz \vee \exists y Ryf(x)) \\
&\equiv \forall x \exists z \exists y(\neg Rzz \vee Ryf(x))
\end{aligned}$$

Skolemnormalform: $\forall x(\neg Rs(x)s(x) \vee Rs'(x)f(x))$

(b) In beiden Fällen geben wir noch ein Konstantensymbol c zur Signatur hinzu. Dann erhalten wir für (i) die Trägermenge $T = \{s^i(c) : i \in \mathbb{N}\}$, wobei s^i für das i-malige Anwenden von s steht (d.h. T ist isomorph zur Menge der natürlichen Zahlen). Die Relation R kann z.B. durch $\{(s^i(c), s^{i+1}(c)) : i \in \mathbb{N}\}$ bzw. jeder Obermenge davon interpretiert werden.

In Fall (ii) erhalten wir die Termstruktur $T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$, wobei $T_0 = \{c\}$ und $T_{i+1} = \{s(t), s'(t), f(t) : t \in T_i\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (d.h. einen Baum, wobei jeder Knoten genau drei Nachfolger hat). Die Relation R kann z.B. durch $\emptyset$ oder $T \times T$ interpretiert werden.