Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E5.1) Betrachten Sie die Signatur $S = \{+, \cdot, \leqslant, 0, 1\}$.

Zeigen Sie, dass in den folgenden S-Strukuren die Ordnung definierbar ist, d.h. dass es für jede der folgenden S-Strukturen $\mathcal{A}$ eine Formel ohne das $\leqslant$-Symbol $\varphi(x, y)$ gibt, so dass

$$a \leqslant^{\mathcal{A}} a' \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} \models \varphi[a, a'].$$

(i) $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, \leqslant^{\mathbb{N}}, 0, 1)$

(ii) $\mathcal{P} = (\mathcal{P}X, \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, X)$

(iii) $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, \leqslant^{\mathbb{R}}, 0, 1)$

Extra: Überlegen Sie sich, warum die Ordnung der ganzen Zahlen (im Gegensatz zu (i)) nicht allein aus Addition und 0 definierbar sein kann.

Musterlösung.

(i) $\varphi(x, y) := \exists z\,(x + z = y)$

(ii) $\varphi(x, y) := x + y = y$ oder $\varphi(x, y) := x \cdot y = x$ oder $\varphi(x, y) := \exists z\,(x + z = y)$

(iii) $\varphi(x, y) := \exists z\,(x + z \cdot z = y)$

(E5.2)

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, -^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}}, 0, 1)$. Eine Formel $\varphi(x, y)$ definiert in $\mathcal{R}$ die Relation

$$\varphi := \{\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \mathcal{R} \models \varphi[a, b] \,\}.$$

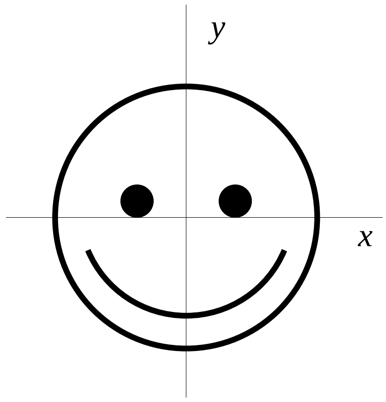
Geben Sie Formeln an, die die folgenden Relationen in $\mathbb{R}^2$ definieren:

(i) Einen Kreis mit Radius 2 um den Ursprung.

(ii) Eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung 2/3.

(iii) Die Strecke, welche vom Punkt $(1, 2)$ bis zum Kreis aus (i) führt und senkrecht auf diesem steht.

(iv) Einen Smiley.



Musterlösung.

(i) $\varphi(x,y) := x \cdot x + y \cdot y = t_4$, wobei wir t_n als eine Abkürzung für $\underbrace{1+1+\ldots 1}_{n-\text{mal}}$ betrachten.

(ii) $\varphi(x,y) := x + x = y + y + y$ oder $\varphi(x,y) := t_2 \cdot x = t_3 \cdot y$.

(iii) $\varphi(x,y) := (y + y = x) \wedge (x < 1 \vee x = 1) \wedge (0 < x)$
$\wedge\ (t_4 < x \cdot x + y \cdot y \vee t_4 = x \cdot x + y \cdot y)$

(iv) Z.B.: $\varphi(x,y) := (x \cdot x + y \cdot y = t_{16}) \vee (x \cdot x + y \cdot y = t_9 \wedge y < -1)$
$\vee\ ((x - t_2) \cdot (x - t_2) + (y - 1) \cdot (y - 1) < 1) \vee ((x + t_2) \cdot (x + t_2) + (y - 1) \cdot (y - 1) < 1)$

(E5.3)

Zeigen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel, dass

$$\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi \quad \not\equiv \quad \exists x\, (\varphi \wedge \psi).$$

Überlegen Sie sich anhand des Semantikspiels warum Ihr Gegenbeispiel zeigt, dass die Formeln nicht äquivalent sind.

Musterlösung.

Man nimmt z.B. die Struktur $(\mathbb{B} = \{0,1\}, 0, 1)$ zur Signatur $S = \{0,1\}$ mit zwei Konstantensymbolen 0 und 1, and Formeln $\varphi(x) := x = 0$ und $\psi(x) := x = 1$.

V gewinnt das Spiel zur Formel $\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi$, da sie die folgende Gewinnstrategie hat: er wartet ab welches Konjunktsglied von **F** gewählt wird. Falls **F** das Konjunktionsglied $\exists x\, \varphi$ wählt, wählt er $x = 0$; falls **F** das Konjunktionsglied $\exists x\, \psi$ wählt, wählt er $x = 1$. In beiden Fällen gewinnt er, also ist die Formel $\exists x\, \varphi \wedge \exists x\, \psi$ wahr in diesem Modell.

Andererseits gewinnt **F** das Spiel zur Formel $\exists x\, (\varphi \wedge \psi)$, da er die folgende Gewinnstrategie hat: er wartet ab welches Element $x \in \mathbb{B}$ von **V** gewählt wird. Falls **V** den Wert $x = 0$ wählt, wählt er die Teilformel ψ; falls **V** den Wert $x = 1$ wählt, wählt er das Konjunktionsglied φ. In beiden Fällen gewinnt er, also ist die Formel $\exists x\, (\varphi \wedge \psi)$ unwahr in diesem Modell.