Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E4.1) Eine *(nicht negative) Hornformel* ist eine Formel der Form

$$(q_1 \wedge \cdots \wedge q_n) \rightarrow q\,.$$

(Für $n = 0$ ergibt sich einfach q.)

Man beachte, dass eine (nicht negative) Hornformel $(q_1 \wedge \cdots \wedge q_n) \rightarrow q$ einer Klausel $\{\neg q_0, \ldots, \neg q_n, q\}$ entspricht, die genau ein positives Literal enthält. Solche Klauseln heißen *Hornklauseln.*

(a) Geben Sie alle Modelle der Menge

$$\Phi = \{p, (p \wedge q) \rightarrow r, p \rightarrow r, (p \wedge q) \rightarrow s, (p \wedge r) \rightarrow t, s \rightarrow t\}$$

an.

(b) Sei Φ eine Menge von nicht negativen Hornformeln und $\mathcal{I} := \{\mathfrak{J} : \mathfrak{J} \models \Phi\}$ die Menge aller ihrer Modelle. Wir definieren eine Interpretation $\mathfrak{J}_0$ durch

$$\mathfrak{J}_0(p) = 1 \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{J}(p) = 1 \text{ für alle } \mathfrak{J} \in \mathcal{I}\,.$$

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{J}_0$ ebenfalls ein Modell von Φ ist. Wir nennen $\mathfrak{J}_0$ das *minimale Modell* von Φ. (Warum?)

(c) Finden Sie eine Formelmenge Φ, die kein minimales Modell besitzt. (Φ kann also nicht nur aus nicht negativen Hornformeln bestehen.)

(d) $K := \big\{\{p\},\ \{\neg p \neg q, r\},\ \{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg q, s\},\ \{\neg p, \neg r, t\}, \{\neg s, t\}\big\}$ ist die Klauselmenge die zu der Menge der Hornformeln Φ aus (a) gehört.

Berechnen Sie $\mathrm{Res}^*(K)$.

(e) Sei Φ eine Menge von Hornformeln, K die dazugehörige Menge von Hornklauseln und $\mathfrak{J}_0$ das minimale Modell von Φ. Zeigen Sie, dass

(i) $\mathrm{Res}^*(K)$ nur Hornklauseln enhält (insbesondere also nicht die leere Klausel);

(ii) für jede Variable p, gilt

$$\{p\} \in \mathrm{Res}^*(K) \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{J}_0(p) = 1\,.$$

Hinweis. Man überlege sich zunächst, daß

$$\mathfrak{J}_0(p) = 1 \quad \text{gdw} \quad \Phi \models p \quad \text{gdw} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(K \cup \{\neg p\})\,.$$

Die Richtung ($\Rightarrow$) folgt aus der Korrektheit des Resolutionskalküls, die Rückrichtung ($\Leftarrow$) aus der Vollständigkeit (siehe Lemma 5.5 bzw. Lemma 5.8).

Musterlösung.

(a) Es gibt die folgenden Möglichkeiten:

p	q	r	s	t
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1

(b) Sei $(q_1 \wedge \dots \wedge q_n) \rightarrow q$ eine Formel in Φ. Angenommen, $\mathfrak{J}_0 \not\models (q_1 \wedge \dots \wedge q_n) \rightarrow q$. Dann gilt $\mathfrak{J}_0(q_i) = 1$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, aber $\mathfrak{J}_0(q) = 0$. Nach Definition von $\mathfrak{J}_0$ gibt es also eine Interpretation $\mathfrak{J} \in \mathcal{I}$ mit $\mathfrak{J}(q) = 0$. Andererseits ist $\mathfrak{J}(q_i) = 1$ für alle i. Somit gilt $\mathfrak{J} \not\models (q_1 \wedge \dots \wedge q_n) \rightarrow q$. Also ist $\mathfrak{J} \notin \mathcal{I}$. Widerspruch.

(c) $\Phi := \{p \vee q\}$ (oder $\neg p \vee \neg q = \neg(p \wedge q)$, eine negative Hornklausel).

(d)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}^0(K) &= \big\{\{\neg p, \neg q, r\},\ \{\neg p, r\},\ \{p\}, \{\neg p, \neg q, s\}, \{\neg p, \neg r, t\}, \{\neg s, t\}\big\} \\
\mathrm{Res}^1(K) &= \mathrm{Res}^0(K) \cup \big\{\{\neg p, t\},\ \{\neg q, r\},\ \{r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r, t\}, \{\neg p, \neg q, t\}\big\} \\
\mathrm{Res}^2(K) &= \mathrm{Res}^1(K) \cup \big\{\{t\}, \{\neg q, t\}\big\} \\
\mathrm{Res}^3(K) &= \mathrm{Res}^2(K)
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}^*(K) = \big\{&\{\neg p, \neg q, r\},\ \{\neg p, r\},\ \{p\}, \{\neg p, \neg q, s\}, \{\neg p, \neg r, t\}, \{\neg s, t\}, \\
&\{\neg p, t\},\ \{\neg q, r\},\ \{r\}, \{\neg q, s\}, \{\neg r, t\}, \{\neg p, \neg q, t\}, \{t\}, \{\neg q, t\}\big\}\,.
\end{aligned}
$$

(e) (i) Wenn wir zwei Hornklauseln $\{\neg q_1, \dots, \neg q_n, q\}$ und $\{\neg q'_1, \dots, \neg q'_m, q'\}$ resolvieren, dann muß dies bezüglich eines der positiven Literale q oder q' geschehen. Wir haben also etwa $q = q'_1$ und die Resolvente

$$\{\neg q_1, \dots, \neg q_n, \neg q'_2, \dots, \neg q'_m, q'\}$$

ist wieder eine Hornklausel. Wenn wir also mit einer Menge von Hornklauseln starten, dann enthalten wir durch Resolution nur Hornklauseln.

(ii) ($\Rightarrow$) Nach Lemma 5.5 folgt aus $\{p\} \in \mathrm{Res}^*(K)$, daß $\Phi \models p$. Somit ist $\mathfrak{J}_0(p) = 1$.

($\Leftarrow$) Angenommen, daß $\mathfrak{J}_0(p) = 1$. Dann gilt $\mathfrak{J}(p) = 1$ für jede Belegung $\mathfrak{J}$ die K erfüllt, also $K \models p$.

Sei K_0 die Klauselmenge, die wir aus K erhalten, indem wir jede Klausel löschen, in der $\neg p$ vorkommt, und in allen übrigen Klauseln das Literal p streichen (falls es vorkommt). Wir behaupten, dass K_0 unerfüllbar ist.

Angenommen, dass $\mathfrak{J}$ eine Belegung ist, die K_0 erfüllt. Sei $\mathfrak{J}'$ die Belegung mit $\mathfrak{J}'(q) = \mathfrak{J}(q)$ für $q \neq p$, und $\mathfrak{J}'(p) = 0$. Dann ist $\mathfrak{J}' \models K$ im Widerspruch zu $K \models p$. Also K_0 unerfüllbar.

Dann gilt $\Box \in \mathrm{Res}^*(K_0)$. Wenn wir in der Ableitung von $\Box$ aus K_0 die Streichung des Literals p wieder rückgängig machen, so erhalten wir entweder eine Ableitung von $\Box$ oder von $\{p\}$. Also ist $\Box \in \mathrm{Res}^*(K)$ oder $\{p\} \in \mathrm{Res}^*(K)$. Da Mengen von (nicht negativen) Hornklauseln immer erfüllbar sind, kann der erste Fall nicht eintreten. Also ist $\{p\} \in \mathrm{Res}^*(K)$.

(E4.2)

Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

(a) $\vdash (p \land q) \lor \neg(q \lor r) \lor r \lor \neg p$

(b) $p, q \lor r \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$

(c) $\vdash \neg(\neg(p \land q) \land r) \lor (q \land r)$

Musterlösung.

(a)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$q, p \vdash p, r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$q, p \vdash q, r$}
\RightLabel{($\land$R)}
\BinaryInfC{$q, p \vdash p \land q, r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$r, p \vdash p \land q, r$}
\RightLabel{($\lor$L)}
\BinaryInfC{$q \lor r, p \vdash p \land q, r$}
\RightLabel{($\neg$R)}
\UnaryInfC{$q \lor r \vdash p \land q, r, \neg p$}
\RightLabel{($\neg$R)}
\UnaryInfC{$\vdash p \land q, \neg(q \lor r), r, \neg p$}
\RightLabel{($\lor$R)}
\UnaryInfC{$\vdash p \land q, \neg(q \lor r), r \lor \neg p$}
\RightLabel{($\lor$R)}
\UnaryInfC{$\vdash p \land q, \neg(q \lor r) \lor r \lor \neg p$}
\RightLabel{($\lor$R)}
\UnaryInfC{$\vdash (p \land q) \lor \neg(q \lor r) \lor r \lor \neg p$}
\end{prooftree}
$$

(b)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p, q \vdash p, p \land r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p, q \vdash q, p \land r$}
\RightLabel{($\land$R)}
\BinaryInfC{$p, q \vdash p \land q, p \land r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p, r \vdash p \land q, p$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$p, r \vdash p \land q, r$}
\RightLabel{($\land$R)}
\BinaryInfC{$p, r \vdash p \land q, p \land r$}
\RightLabel{($\lor$L)}
\BinaryInfC{$p, q \lor r \vdash p \land q, p \land r$}
\RightLabel{($\lor$R)}
\UnaryInfC{$p, q \lor r \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$}
\end{prooftree}
$$

(c)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$r \vdash q, q$}
\AxiomC{$r \vdash q, p$}
\RightLabel{($\land$R)}
\BinaryInfC{$r \vdash q, p \land q$}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$r \vdash r, p \land q$}
\RightLabel{($\land$R)}
\BinaryInfC{$r \vdash q \land r, p \land q$}
\RightLabel{($\neg$L)}
\UnaryInfC{$\neg(p \land q), r \vdash q \land r$}
\RightLabel{($\land$L)}
\UnaryInfC{$\neg(p \land q) \land r \vdash q \land r$}
\RightLabel{($\neg$R)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(\neg(p \land q) \land r), q \land r$}
\RightLabel{($\lor$R)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(\neg(p \land q) \land r) \lor (q \land r)$}
\end{prooftree}
$$

Eine nicht erfüllende Belegung ist z.B. $r \mapsto 1$ und $q, p \mapsto 0$.