Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E3.1) Seien φ und ψ AL-Formeln. Wie kann man das Resolutionsverfahren benutzen, um zu überprüfen, ob

(a) φ unerfüllbar ist;

(b) φ erfüllbar ist;

(c) φ allgemeingültig ist;

(d) φ nicht allgemeingültig ist;

(e) $\varphi \models \psi$;

(f) eine endliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist;

(g) eine unendliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist?

Musterlösung.

(a) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$ $\quad$ ($K(\varphi)$ bezeichnet die Klauselmenge zu φ.)

(b) $\Box \notin \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$

(c) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$

(d) $\Box \notin \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$

(e) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi \wedge \neg\psi))$

(f) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi))$

(g) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi_0))$ für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

(E3.2)

Seien

$$\varphi := (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$
$$\psi := (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, dass

(a) φ erfüllbar ist;

(b) $\varphi \models \psi$ gilt.

Musterlösung.

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^0(K) &= \big\{\{p, \neg q, \neg r\},\ \{\neg p, q, \neg r\},\ \{\neg p, \neg q\}\big\}\\
\mathrm{Res}^1(K) &= \mathrm{Res}^0(K) \cup \big\{\{q, \neg q, \neg r\},\ \{\neg q, \neg r\},\ \{p, \neg p, \neg r\},\ \{\neg p, \neg r\}\big\}\\
\mathrm{Res}^2(K) &= \mathrm{Res}^1(K) \cup \big\{\{\neg p, \neg q, \neg r\}\big\}\\
\mathrm{Res}^3(K) &= \mathrm{Res}^2(K)
\end{aligned}$$

(b) Klauseln: $\{p, \neg q, \neg r\},\ \{\neg p, q, \neg r\},\ \{\neg p, \neg q\},\ \{p, q\},\ \{p, \neg q, r\},\ \{\neg p, q, r\}$

$$\begin{tikzcd}
\{\neg p, q, r\} \arrow[d] & \{\neg p, q, \neg r\} \arrow[dl] & & \{p, \neg q, \neg r\} \arrow[dr] & \{p, \neg q, r\} \arrow[d] \\
\{\neg p, q\} \arrow[dr] & \{p, q\} \arrow[d] & & \{\neg p, \neg q\} \arrow[d] & \{p, \neg q\} \arrow[dl] \\
 & \{q\} \arrow[dr] & & \{\neg q\} \arrow[dl] & \\
 & & \square & &
\end{tikzcd}$$

(E3.3)

Geben Sie einen Beweis des AL-Kompaktheitssatzes (Satz 4.1) direkt auf der Basis von Königs Lemma (Lemma 4.4).

Sei $\Phi = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathrm{AL}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Teilmenge $\Phi_n := \{\varphi_i : i < n\}$ erfüllbar. Fur $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{V}(n)$ die Menge derjenigen Variablen, die in Φ_n vorkommen. Wir konstruieren einen Baum $\mathcal{T}$ von (partiellen) Belegungen wie folgt:

- die Knoten auf Tiefe n seien gerade diejenigen Belegungen von $\mathcal{V}(n)$, die Φ_n erfüllen.
- ein Knoten der Tiefe $n+1$, also eine Belegung $\mathcal{I} : \mathcal{V}(n+1) \to \mathbb{B}$, ist direkter Nachfolger des Knoten $\mathcal{I} \restriction \mathcal{V}(n)$ auf Tiefe n.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ endlich verzweigt und unendlich ist.

(b) Folgern Sie mittels Königs Lemma, dass Φ erfüllbar ist.

Musterlösung.

(a) Da jede Formelmenge Φ_n endlich ist und jede Formel nur endlich viele Symbole und deshalb Variablen enthält, sind auch die Mengen $\mathcal{V}(n)$ endlich. Deshalb gibt es nur endlich viele Funktionen der Form $\mathcal{V}(n) \to \mathbb{B}$ und endliche viele Knoten der Tiefe n.

Gegeben ist, dass jede Menge Φ_n erfüllbar ist, was heißt, dass es Knoten mit beliebig großer Tiefe gibt. Deshalb ist der Baum $\mathcal{B}$ unendlich.

(b) Königs Lemma besagt jetzt, dass der Baum $\mathcal{B}$ einen unendlichen Pfad hat. Das heißt, das es eine Sequenz von Belegungen $\mathcal{I}_n : \mathcal{V}(n) \to \mathbb{B}$ gibt, so dass $\mathcal{I}_n \models \Phi_n$ und $\mathcal{I}_{n+1} \restriction \mathcal{V}(n) = \mathcal{I}_n$. Hieraus konstruieren wir eine Belegung $\mathcal{I}$ für Φ.

Wenn p eine Variable ist, die in keiner der $\mathcal{V}(n)$ vorkommt, können wir $\mathcal{I}(p)$ definieren wie wir wollen, z.B., 0. Kommt p in $\mathcal{V}_n$ vor, dann können wir setzen

$$\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}_n(p),$$

da die Rechte Seite nicht von n abhängt. $\mathcal{I}$ ist ein Modell für Φ, da $\mathcal{I}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Variablen in φ_n genau so belegt wie $\mathcal{I}_n$ und $\mathcal{I}_n$ ein Modell ist für Φ_n und $\varphi_n \in \Phi_n$.