Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E2.1)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen.

(i) $\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $\models \varphi \to \psi$.

(ii) Wenn $\varphi \models \psi$ und φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iii) Wenn $\varphi \models \psi$ und ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iv) $\{\varphi, \psi\} \models \vartheta$ genau dann, wenn $\varphi \models \vartheta$ oder $\psi \models \vartheta$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen und Folgerungsbeziehungen.

(i) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

(ii) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

(iii) $\{\neg\psi, \psi \to \varphi\} \models \neg\varphi$

(iv) $\{\neg\varphi, \psi \to \varphi\} \models \neg\psi$

Musterlösung.

(a) (i) Richtig.
$\Rightarrow$: Ist $\mathfrak{I}$ eine Interpretation, dann gilt entweder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$ oder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$. In dem ersten Fall, gilt $(\varphi \to \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$, also $\mathfrak{I} \models \varphi \to \psi$. In dem zweiten Fall, gilt auch $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$, da $\varphi \models \psi$ bedeutet, dass jede Interpretation die φ wahr macht auch ψ wahr macht. Also auch in diesem Fall $(\varphi \to \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$.
$\Leftarrow$: Angenommen $\mathfrak{I}$ ist eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \varphi$, also $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$. Da auch $\mathfrak{I} \models \varphi \to \psi$, muss auch gelten $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$ und $\mathfrak{I} \models \psi$. Damit ist $\varphi \models \psi$ gezeigt.

(ii) Richtig. $\varphi \models \psi$ heißt, dass jede Interpretation die φ wahr macht auch ψ wahr macht. Machen alle Interpretationen φ wahr, dann gilt das auch für ψ, oder gibt es eine Interpretation die φ wahr macht, dann gilt das auch für ψ.

(iii) Falsch (in beiden Fällen). $0 \models 1$, aber es gibt keine Modelle für 0, und alle Modelle machen 1 wahr.

(iv) Falsch. Gegenbeispiel: $\varphi = p, \psi = \neg p, \vartheta = 0$.

(b) (i) Richtig. Angenommen $\mathfrak{I}$ ist eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \neg(\varphi \vee \psi)$, also $\neg(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\neg(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 1 &\Leftrightarrow (\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \varphi^{\mathfrak{I}} = 0 \quad \text{und} \quad \psi^{\mathfrak{I}} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 1 \quad \text{und} \quad (\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1 \\
&\Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1
\end{aligned}$$

Also, $\mathfrak{I} \models \neg(\varphi \vee \psi)$ gdw $\mathfrak{I} \models \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

(ii) Falsch. Ist $\varphi = p$, $\psi = q$ und $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I}(p) = 1$ und $\mathcal{I}(q) = 0$, dann gilt $(\neg(\varphi \vee \psi))^{\mathcal{I}} = 0$ und $(\neg\varphi \vee \neg\psi)^{\mathcal{I}} = 1$.

(iii) Falsch. Ist $\varphi = p$, $\psi = q$ und $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I}(p) = 1$ und $\mathcal{I}(q) = 0$, dann gilt $(\neg\psi)^{\mathcal{I}} = 1$, $(\psi \rightarrow \varphi)^{\mathcal{I}} = 1$ und $(\neg\varphi)^{\mathcal{I}} = 0$.

(iv) Richtig. Angenommen $\mathfrak{I}$ ist eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \{\neg\varphi, \psi \rightarrow \varphi\}$, also $(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ und $(\psi \rightarrow \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$. Es folgt $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$. Da $(\neg\psi \vee \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ oder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$, folgt $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ wie gewünscht.

(E2.2)

Wir versuchen, ein verteiltes System in der Aussagenlogik zu modellieren. Angenommen wir wollen n Prozesse für s Zeiteinheiten beobachten. Jeder Prozeß kann sich an jedem Zeitpunkt im Zustand p, q oder r befinden. Wir führen Aussagenvariablen p_t^i, q_t^i und r_t^i ein, die auf wahr gesetzt werden, wenn Prozeß i zur Zeit t im entsprechenden Zustand ist. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in AL:

(a) Zu jedem Zeitpunkt ist höchstens ein Prozeß in Zustand q.

(b) Es sind immer mindestens zwei Prozesse in Zustand p.

(c) Wenn sich ein Prozeß in Zustand q befindet, dann wechselt er nach spätestens 3 Zeiteinheiten in den Zustand r.

Musterlösung.

(a) $\displaystyle\bigwedge_{t \leqslant s} \bigwedge_{i \neq k} \neg(q_t^i \wedge q_t^k)$

(b) $\displaystyle\bigwedge_{t \leqslant s} \bigvee_{i \neq k} (p_t^i \wedge p_t^k)$

(c) $\displaystyle\Big\{ \bigwedge_{t \leqslant s-3} \bigwedge_{i \leqslant n} [q_t^i \rightarrow (r_{t+1}^i \vee r_{t+2}^i \vee r_{t+3}^i)]\Big\} \wedge [q_{s-2}^i \rightarrow (r_{s-1}^i \vee r_s^i)] \wedge [q_{s-1}^i \rightarrow r_s^i]$

(E2.3)

(a) Für Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jedes Modell, das alle Formeln $\varphi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gibt, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Eine Interpretation $\mathcal{I} : \mathcal{V} = \{p_1, p_2, \ldots\} \to \mathbb{B}$ kann aufgefasst werden als eine unendliche Bit-Sequenz. P sei irgendeine Teilmenge aller solchen Sequenzen, $\overline{P}$ das Komplement von P. Wir betrachten ein P, so dass sowohl P als auch $\overline{P}$ durch (unendliche) AL-Formelmengen spezifiziert werden können, in dem Sinne, dass

$$\begin{aligned} P &= \{\mathcal{I} : \mathcal{I} \models \Phi\} \\ \overline{P} &= \{\mathcal{I} : \mathcal{I} \models \Psi\} \end{aligned}$$

für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$.

Zeigen Sie, dass dann sowohl P als auch $\overline{P}$ sogar schon durch einzelne AL-Formeln φ und ψ spezifiziert werden können (und also nur von endlichen Abschnitten der Sequenzen abhängen können).

Musterlösung.

(a) Wenn $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ gilt, dann hat die Menge $\Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle, wobei $\neg\Psi = \{\neg\psi : \psi \in \Psi\}$. Der Kompaktheitssatz impliziert dann, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle hat. Setzen wir $\Phi_0 = \{\varphi \in \Phi : \varphi \in \Gamma\}$ und $\Psi_0 = \{\psi \in \Psi : \neg\psi \in \Gamma\}$, dann heißt das, dass $\Gamma = \Phi_0 \cup \neg\Psi_0$ keine Modelle hat, also $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Die Vereinigung $\Phi \cup \Psi$ kann keine Modelle haben, da solche Modelle sowohl als auch zu P als $\overline{P}$ gehören würden. Der Kompaktheitssatz sagt jetzt, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi \cup \Psi$ keine Modelle hat. Da jede Formel in Γ entweder zu Φ oder zu Ψ gehört, muss Γ von der Form

$$\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\}$$

sein, wobei $\varphi_i \in \Phi$ und $\psi_i \in \Psi$. Wenn wir schreiben $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ und $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_n$, dann sind die Modelle von φ genau die Elemente von P und die Modelle von ψ genau die Elemente von $\overline{P}$. Diese Behauptung folgt aus den folgenden drei Tatsachen:

1. Elemente von P sind Modelle von φ und Elemente von $\overline{P}$ sind Modelle von ψ.
2. Es gibt keine Modellen die gleichzeitig φ und ψ wahr machen.
3. Jedes Modell gehört entweder zu P oder zu $\overline{P}$.