**Fachbereich Mathematik**
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# 1. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

**(E1.1)**

(a) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee (\neg q \wedge r))$$

Ist die Formel erfüllbar? Ist sie allgemeingültig?

(b) Geben Sie eine Formel zu folgender Wahrheitstafel an:

| $p$ | $q$ | $r$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

(c) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn höchtens ein der Variablen $p, q, r$ wahr ist.

(d) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r, s)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn genau drei der Variablen denselben Wert haben.

**Musterlösung.**

(a) Wahrheitstafel:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg p \wedge \neg q$ | $p \vee (\neg q \wedge r)$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Die Formel ist also erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(b) $\varphi := (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

(c) $\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$

(d) $$\begin{aligned}\varphi := {} & (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \\ & \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \\ & \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s)\end{aligned}$$

**(E1.2)**

Für $n \geqslant 1$ sei

$$\varphi_n(p_1, \ldots, p_{2n}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i})$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, daß

(a) $\varphi_n$ genau $2^n$ verschiedene Modelle hat;

(b) $\varphi_n$ äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;

(c) jede zu $\varphi_n$ äquivalente Formel in DNF mindestens $2^n$ Disjunktionsglieder hat.

**Musterlösung.**

(a) Für jedes $i \leqslant n$, muß genau eine der Variablen $p_{2i-1}$ und $p_{2i}$ wahr sein. Es gibt also genau so viele Modelle, wie es Funktionen $\{1, \ldots, n\} \to \{1, 2\}$ gibt. Dies sind $2^n$.

(b) $\varphi_n \equiv \bigwedge_{i=1}^{n}[(\neg p_{2i-1} \vee \neg p_{2i}) \wedge (p_{2i-1} \vee p_{2i})]$

(c) Angenommen, es gibt eine Formel $\bigvee_{i=1}^{m} \psi_i$ in DNF mit $m < 2^n$ Disjunktionsgliedern. Für jedes Modell $\mathfrak{J}$ von $\varphi_n$, muß es ein Disjunktionsglied $\psi_k$ geben mit $\mathfrak{J} \models \psi_k$. Somit existiert mindestens ein Disjunktionsglied $\psi_k$ mit mehr als einem Modell.

Da $\psi_k$ mehr als ein Modell hat, gibt es mindestens eine Variable $p_i$, so daß weder $p_i$ noch $\neg p_i$ in $\psi_k$ vorkommen. Sei $p_j$ der »Partner« von $p_i$, d. h., $j = i + 1$, wenn $i$ ungerade ist, und $j = i - 1$, falls $i$ gerade ist.

Wir wählen ein Modell $\mathfrak{J}$ von $\psi_k$. Sei $\mathfrak{J}'$ die Interpretation mit $\mathfrak{J}'(p_i) = \mathfrak{J}(p_j)$ und $\mathfrak{J}'(p_l) = \mathfrak{J}(p_l)$, für alle $l \neq i$. Dann folgt, daß $\mathfrak{J}' \models \psi_k$ und somit $\mathfrak{J}' \models \varphi_n$. Dies ist aber unmöglich, da $\mathfrak{J}' \models p_i \leftrightarrow p_j$.

**(E1.3)**

Wir wollen die Aussagenlogik benutzen, um eine Spezifikation für einen Aufzug zu schreiben. Angenommen, wir haben einen Aufzug mit 6 Etagen. Auf jeder Etage befindet sich ein Knopf, um den Aufzug zu rufen. Desweiteren gibt es im Aufzug Knöpfe für die einzelnen Etagen. Überlegen Sie sich, wie man das Verhalten des Aufzugs am geschicktesten in AL kodiert, und formulieren Sie die folgenden Auszüge aus der Spezifikation:

(a) Es ist nie der Fall, daß sich der Aufzug bewegt und die Türe offen steht.

(b) Wenn der Aufzug auf Etage 2 angekommen ist, dann hält er genau dann an, wenn ein Fahrgast die 2. Etage ausgewählt hat oder der Knopf in der 2. Etage betätigt worden ist.

(c) Wenn der Aufzug auf der 2. Etage ankommt und anhält, dann öffnet er die Tür.

(d) Wenn sich der Aufzug im Keller befindet und die Türe geschlossen ist, dann fährt er weiter, wenn das Erdgeschoß oder Etagen 1 bis 4 im Aufzug oder auf den einzelnen Etagen ausgewählt wurden.

**Musterlösung.** Wir benutzen die folgenden Aussagenvariablen:

- $T_t$: »Die Tür ist zur Zeit $t$ offen.«
- $B_t$: »Der Aufzug bewegt sich zur Zeit $t$.«
- $E_{i,t}$: »Der Aufzug befindet sich zur Zeit $t$ in Etage $i$.«
- $K_{i,t}$: »Der Knopf auf Etage $i$ wurde zur Zeit $t$ gedrückt.«
- $A_{i,t}$: »Der Knopf in Aufzug für Etage $i$ wurde zur Zeit $t$ gedrückt.«

(a) $\neg(B_t \wedge T_t)$

(b) $E_{2,t} \rightarrow (\neg B_{t+1} \leftrightarrow (A_{2,t} \vee K_{2,t}))$

(c) $(E_{2,t} \wedge \neg B_t) \rightarrow T_{t+1}$

(d) $(E_{-1,t} \wedge \neg T_t) \rightarrow (\bigvee_{i=0}^{4}(K_{i,t} \vee A_{i,t}) \rightarrow B_{t+1})$