Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

Abgabe: Di. 24.6., nach der Vorlesung

Geben Sie bitte ihren Namen und die Nummer ihrer Übungsgruppe an.

(H2.1)

$\preccurlyeq$ sei ein 2-stelliges Relationssymbol in Infixnotation. Betrachten Sie den FO($\preccurlyeq$)-Satz

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \wedge x_4 \preccurlyeq x_2) \rightarrow x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big).$$

(a) Sei $\mathcal{A} = (A, \preccurlyeq^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0, 1, 2\}$ und $\preccurlyeq^{\mathcal{A}} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,2)\}$. Zeigen Sie $\mathcal{A} \not\models \varphi$, indem Sie eine Gewinnstrategie für den Falsifizierer angeben.

Hinweis:

(i) Bringen Sie φ in Negationsnormalform φ', und bestimmen Sie $\mathsf{SF}(\varphi')$.

(ii) Skizzieren Sie die Struktur $\mathcal{A}$, und überlegen Sie inhaltlich, was die Subformeln von φ' bedeuten.

(iii) Geben Sie für alle relevanten Spielpositionen an, wie der Falsifizierer ziehen soll, um sicher zu gewinnen.

(b) Sei ψ eine zu

$$\exists x_3 \Big((x_3 \preccurlyeq x_1 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2) \wedge \forall x_4 \big((x_4 \preccurlyeq x_1 \wedge x_4 \preccurlyeq x_2) \rightarrow x_4 \preccurlyeq x_3 \big) \Big)$$

äquivalente Formel in Negationsnormalform.
Für welche $(a_1', a_2') \in A \times A$ hat der Verifizierer in der Position

$$(\psi, (a_1', a_2', a_3, a_4))$$

eine Gewinnstrategie?

(H2.2)

Betrachten Sie die folgenden FO-Formeln:

(i) $\exists x(Px \rightarrow \forall x Px)$

(ii) $\exists y(Ryy \wedge \forall x(Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy)))$

(iii) $\forall x \exists y Pxy \rightarrow \exists x \forall y Rxy$

(iv) $\forall y \exists x(Rxy \vee \exists z Pzx)$

(a) Geben Sie für jede dieser FO-Formeln äquivalente Formeln in pränexer Normalform und in Skolemnormalform an.

(b) Geben Sie für eine zu (ii) äquivalente Formel in Skolemnormalform sowohl ein Herbrand-Model an, als auch ein endliches Modell und ein Modell mit Elementen, die nicht durch variablenfreien Terme beschrieben werden.

(H2.3)

(a) Geben Sie eine passende Signatur an, und drücken Sie darüber die folgenden „Tatsachen“ durch Sätze der Logik erster Stufe aus:

(i) Ein Drache ist glücklich, wenn alle seine Kinder fliegen können.

(ii) Grüne Drachen können fliegen.

(iii) Ein Drache ist grün, wenn einer seiner Elterndrachen grün ist.

(iv) Alle grünen Drachen sind glücklich.

Hinweis: Überlegen Sie sich u. a., was Sie in der Signatur benötigen, um „ist Kind von“ ausdrücken zu können.

(b) Leiten sie argumentativ die vierte Aussage aus den ersten drei her.

(c) Zeigen Sie mittels Reduktion von FO auf AL und dem AL-Resolutionsverfahren, dass die vierte Aussage aus den ersten drei folgt.

Hinweis: Beachten Sie, dass man auf eine Skolemfunktion geführt wird, die ggf. „non-flying-kids“ liefert.

(H2.4)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, daß die Formelmenge

$$\begin{aligned}&\forall x \forall y\,((Qx \wedge Rxy) \rightarrow Sy)\,,\\ &\forall x \forall y\,((Sx \wedge Rxy) \rightarrow \neg Qy),\\ &\forall x \exists y\,(Rxy \wedge Qy)\,,\end{aligned}$$

unerfüllbar ist.

(b) Leiten Sie die folgende Sequenz ab:

$$\forall x \neg Px, \neg \exists x(\neg Px \wedge \neg Qx) \vdash \exists x Qx\,.$$

(c) Beweisen Sie die Korrektheit der Regel

$$\frac{\Gamma, \varphi(s,t) \vdash \Delta, \psi(s,t) \qquad \Gamma, \psi(s,t) \vdash \varphi(s,t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x \exists y(\varphi(x,y) \leftrightarrow \psi(x,y)), \Delta}$$

(i) semantisch, d. h. mit Hilfe von Interpretationen;

(ii) indem Sie diese Regel mit den bekannten Regeln des Sequenzenkalküls simulieren.

(H2.5)

Sei Σ ein Alphabet und $S = \{(E_a)_{a \in \Sigma}, s\}$ die zugehörige Signatur für Transitionssysteme mit einer Konstante s für das Startsymbol.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es keinen FO(S)-Satz gibt, der genau dann wahr ist in einer S-Struktur $\mathcal{A} = (Q, (E_a^{\mathcal{A}})_{a \in A}), s^{\mathcal{A}})$, wenn es *keinen* unendlichen Lauf gibt: d.h., wenn es keine unendliche Folge $(q_i \in Q)_{i \in \mathbb{N}}$ gibt, so dass $q_0 = s^{\mathcal{A}}$ und für alle $i \in \mathbb{N}$ mindestens ein $a \in \Sigma$ existiert mit $(q_i, q_{i+1}) \in E_a^{\mathcal{A}}$.

Warnung: Beachten Sie auch den Unterschied zwischen die Existenz von „beliebig langen Läufen“ und „unendlichen Läufen“.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es keine FO(S)-Formel $\varphi(x)$ gibt, die die Erreichbarkeit vom Startzustand s aus definiert, in dem Sinne, dass für eine S-Struktur $\mathcal{A} = (Q, (E_a^{\mathcal{A}})_{a \in A}), s^{\mathcal{A}})$ und $a \in Q$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[a]$ genau dann wenn a in $\mathcal{A}$ von $s^{\mathcal{A}}$ aus erreichbar ist.

Erinnerung: a ist in $\mathcal{A}$ von $s^{\mathcal{A}}$ aus erreichbar wenn es eine Folge $(q_i \in Q)_{i \leqslant n}$ gibt, so dass $q_0 = s^{\mathcal{A}}$, $q_n = a$ und für alle $i < n$ mindestens ein $a \in \Sigma$ existiert mit $(q_i, q_{i+1}) \in E_a^{\mathcal{A}}$.