Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

Abgabe: Di. 6.5., nach der Vorlesung

Geben Sie bitte ihren Namen und die Nummer ihrer Übungsgruppe an.

(H1.1) Wir definieren folgende partielle Ordnung auf $\mathbb{B}^n$:

$$\mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}' \quad \text{:gdw.} \quad b_i \leqslant b_i' \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Eine Funktion $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ heißt *monoton* gdw.

$$\mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}' \Rightarrow f(\mathbf{b}) \leqslant f(\mathbf{b}')$$

für $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{B}^n$. Eine AL_n-Formel φ ohne Negationszeichen heißt *positiv*.

In Folgenden soll gezeigt werden, dass positive Formeln φ gerade die monotone Boolesche Funktionen f_φ repräsentieren (vgl. Abschnitt 3.1).

(a) Beweisen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass für eine positive aussagenlogische Formel $\varphi \in \mathrm{AL}_n$ die Funktion

$$f_\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{B}^n & \to & \mathbb{B} \\ \mathbf{b} & \mapsto & \varphi[\mathbf{b}] \end{array}$$

monoton ist.

(b) Für $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^n$, sei

$$\varphi^+_{\mathbf{b}} = \bigwedge \{p_i \,:\, b_i = 1\}$$

(der positive Anteil von $\varphi_{\mathbf{b}}$, vgl. Beweis von Satz 3.2). Zeigen Sie, dass

$$\varphi^+_{\mathbf{b}} \equiv \bigvee \{\varphi_{\mathbf{b}'} \,:\, \mathbf{b} \leqslant \mathbf{b}'\}.$$

(c) Zeigen Sie (analog zu Satz 3.2), dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ durch eine positive Formel in AL_n dargestellt wird.

(H1.2) Ein *Dominosystem* $\mathcal{D} = (D, H, V)$ besteht aus einer endlichen Menge D von quadratischen Dominosteinen und zwei Relationen $H \subseteq D \times D$ und $V \subseteq D \times D$, so dass

- $(d, e) \in H$ gdw. e rechts neben d passt,
- $(d, e) \in V$ gdw. e unter d passt.

Wir betrachten ein festes Dominosystem $\mathcal{D} = (D, H, V)$.

(a) Geben Sie zu $n \in \mathbb{N}$ eine AL-Formelmenge Φ_n an, welche genau dann erfüllbar ist, wenn man ein Quadrat der Größe $n \times n$ so mit Dominosteinen aus $\mathcal{D}$ belegen kann, dass nebeneinander liegende Steine zueinander passen. (Wir nehmen an, dass es von jedem Dominostein unbegrenzt viele Exemplare gibt.)

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, daß man die gesamte Ebene $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ korrekt mit Dominosteinen belegen kann, vorausgesetzt dies geht für alle endlichen Quadrate $n \times n$.

(H1.3) Gegeben sei die folgende Menge von nicht-negativen Hornklauseln:

$$M := \{\{a, \neg d\}, \{d\}, \{\neg a, c\}, \{a, \neg b, \neg d\}, \{\neg c, \neg e, a, \neg b\}, \{\neg a, \neg d, c\}, \{\neg d, e, \neg a, \neg b\}\}$$

(a) Bestimmen Sie eine minimale Belegung für M.

(b) Betrachten Sie nun folgende Mengen von negativen Hornklauseln:

$$N_1 := \{\{\neg b\}, \{\neg d, \neg e\}\}, \qquad N_2 := \{\{\neg d, \neg a, \neg b\}, \{\neg c, \neg a\}, \{\neg c, \neg d, \neg e\}\}\,.$$

Überprüfen Sie für $i \in \{1, 2\}$, ob die minimale Belegung aus (a) die Klauselmenge $M \cup N_i$ erfüllt.

(H1.4)

(a) Zeigen Sie, dass folgende Regeln korrekt sind.

(i) $$\frac{\Gamma \vdash \emptyset}{\Gamma \vdash \varphi}$$ (ex falso quodlibet) (ii) $$\frac{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi}{\Gamma, \varphi \vdash \chi}$$

(b) Geben Sie ein Verfahren an, das eine $\mathcal{SK}$-Ableitung von $\Gamma \vdash \emptyset$ in eine $\mathcal{SK}$-Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ transformiert.

(c) Geben Sie eine „direkte Simulation“ von Regel (ii) in $\mathcal{SK}^+$ an, d. h. geben Sie einen Ableitungsbaum in $\mathcal{SK}^+$ mit Wurzel $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ an, dessen Blätter nur mit Axiomen oder $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ beschriftet sind.

(d) Begründen Sie, warum Regel (ii) in $\mathcal{SK}$ nicht direkt simulierbar ist. D. h. zeigen Sie, dass es keinen $\mathcal{SK}$ Ableitungsbaum mit Wurzel $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ gibt, dessen Blätter nur mit Axiomen oder $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ beschriftet sind.

Hinweis: Betrachten Sie hierfür die Länge der Formeln von Prämisse und Konklusion der $\mathcal{SK}$ Regeln.

(H1.5)

(a) Weisen Sie die Korrektheit der folgenden Sequenzenregel nach:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \vartheta \quad \Gamma, \vartheta \vdash \Delta, \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}$$

(b) Leiten Sie die folgende Sequenz in $\mathcal{SK}$ ab:

$$\neg p \vee (q \wedge r),\ \neg q \vdash (\neg p \wedge r) \vee \neg(p \vee r)$$

(H1.6) [Zusatzaufgabe (for fun)]

Lösen Sie das Rätsel auf der nächsten Seite (aus Lewis Carroll, *Symbolic Logic*, 1896)

(a) mit dem Resolutionskalkül.

(b) mit dem Sequenzenkalkül.

Hinweis: Arbeiten Sie z.B. mit Aussagenvariablen p_{xy} für $x, y \in \{a, b, c, d, e, h\} \cup \{A, B, C, D, E, H\}$ mit der Bedeutung „x ist in derselben Gruppe wie y"; hierbei steht etwa a für Mr Acres, A für Mrs Acres, etc.

(18) People, who are popular and worthy of praise, either are public benefactors or else are unassuming.

Univ. "persons"; a = able to keep a secret; b = clear-headed; c = constantly talking; d = deserving praise; e = exhibited in shop-windows; h = expressing oneself well; k = fit to be an M.P.; l = influential; m = never-to-be-forgotten; n = popular; r = public benefactors; s = unassuming; t = using one's influence for good objects; v = well-educated; w = women; z = worth one's weight in gold.

15.

Six friends, and their six wives, are staying in the same hotel; and they all walk out daily, in parties of various size and composition. To ensure variety in these daily walks, they have agreed to observe the following Rules:—

(1) If Acres is with (i.e. is in the same party with) his wife, and Barry with his, and Eden with Mrs. Hall, Cole must be with Mrs. Dix;
(2) If Acres is with his wife, and Hall with his, and Barry with Mrs. Cole, Dix must *not* be with Mrs. Eden;
(3) If Cole and Dix and their wives are all in the same party, and Acres *not* with Mrs. Barry, Eden must *not* be with Mrs. Hall;
(4) If Acres is with his wife, and Dix with his, and Barry *not* with Mrs. Cole, Eden must be with Mrs. Hall;
(5) If Eden is with his wife, and Hall with his, and Cole with Mrs. Dix, Acres must *not* be with Mrs. Barry;
(6) If Barry and Cole and their wives are all in the same party, and Eden *not* with Mrs. Hall, Dix must be with Mrs. Eden.

The Problem is to prove that there must be, every day, at least *one* married couple who are not in the same party.