**Fachbereich Mathematik**
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# 11. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

**(E11.1)**

Welche der folgenden Mengen sind entscheidbar, welche sind rekursiv aufzählbar?

(a) $\mathrm{SAT(AL)} := \{\varphi \in \mathrm{AL} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$

(b) $\{(\varphi, \psi) \in \mathrm{AL} : \varphi \models \psi\}$

(c) $\mathrm{SAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ erfüllbar}\}$

(d) $\mathrm{VAL(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ allgemeingültig}\}$

(e) $\mathrm{UNSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ unerfüllbar}\}$

(f) $\mathrm{FINSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ hat ein endliches Modell}\}$

(g) $\mathrm{INFSAT(FO)} := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ ist erfüllbar und hat nur unendliche Modelle}\}$

(h) $\{(\varphi, \psi) \in \mathrm{FO} : \varphi \models \psi\}$

(i) $\{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ hat Quantorenrang } 5\}$

(j) $\{\varphi \in \mathrm{FO} : \varphi \text{ ist äquivalent zu einer Formel von Quantorenrang } 5\}$

**(E11.2)**

(a) Wir betrachten Wortmodelle $\mathcal{W} = (\{1, \ldots, n\}, <, P_a, P_b)$ mit zwei Buchstaben. Bestimmen Sie durch Analyse von Ehrenfeucht-Fraïssé Spielen den minimalen Quantorenrang einer Formel, mit deren Hilfe die beiden folgenden Wörter unterschieden werden können:

$$a\,b\,a\,b\,a \qquad a\,b\,b\,a\,b\,a$$

(b) Wir betrachten Strukturen $\mathcal{A} = (A, P, Q)$ mit zwei einstelligen Relationen $P$ und $Q$. Zeigen Sie, dass es keine FO-Formel $\varphi$ gibt, so dass gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ und } Q \text{ haben gleich viele Elemente.}$$

(c) Zeigen Sie, dass es für Wortstrukturen $\mathcal{W} = (\{1, \ldots, n\}, <, P_a, P_b)$ keine FO-Formel $\varphi$ gibt, so dass gilt

$$\mathcal{W} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{W} \text{ enthält gleich viele } a \text{ wie } b.$$

(Beachten Sie, dass die Aussage aus (b) hieraus folgt.)

## (E11.3)

(a) Zeigen Sie mit dem Resolutionskalkül, dass die folgenden Formelmengen unerfüllbar sind:

   (i) $\{ (p \vee q) \to x, (x \vee y) \to z, p \vee q \vee y, \neg z \}$

   (ii) $\{ \forall x \forall y \forall z(Rxy \vee Rxz \vee Ryz), \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),$
   $\forall x \forall y(Rxy \to Rfxfy), \forall x \neg Rxffx \}$

   (iii) $\{ \forall x \forall y(Rxy \to (Px \wedge \neg Py)), \forall x \forall y(Rxy \to \exists z(Rxz \wedge Rzy)), \forall x Rxfx \}$

(b) Untersuchen Sie für jede der obigen Formelmengen, ob es auch echte Teilmengen gibt, die schon unerfüllbar sind.

## (E11.4)

Leiten Sie die folgenden Sequenzen in $\mathcal{SK}^+$ ab.

(a) $\forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \wedge \forall x \neg Rxx \vdash \forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx)$

(b) $\forall x \forall y fx = fy \vdash \exists x fx = x$

## (E11.5)

Wir betrachten ungerichtete Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$. Welche der folgenden Aussagen lassen sich durch eine Menge von FO-Formeln ausdrücken? Geben Sie eine entsprechende Formelmenge an, oder begründen Sie, wieso eine solche nicht existiert.

(a) Der Abstand zwischen den Knoten $x$ und $y$ ist gerade (oder unendlich).

(b) $\mathcal{G}$ enthält keinen Kreis.

(c) $\mathcal{G}$ enthält einen Kreis.

(d) Jeder Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.

(e) Kein Knoten von $\mathcal{G}$ hat unendlich viele Nachbarn.