Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E8.1)

Seien R und E zweistellige Relationssymbole und Φ die Formelmenge:

(1) $\forall x Exx$,
(2) $\forall x \forall y(Exy \to Eyx)$,
(3) $\forall x \forall y \forall z((Exy \land Eyz) \to Exz)$,
(4) $\forall x \forall y(\neg Exy \to \exists z(\neg Exz \land \neg Eyz \land Rxz \land \neg Ryz))$,
(5) $\forall x \forall y(Rxy \to Ryx)$,
(6) $\forall x \forall y(Exy \to \neg Rxy)$,
(7) $\forall x \exists y Rxy$,
(8) $\exists x \forall y(\neg Exy \to Rxy)$.

(a) (1)–(3) besagen, dass E eine Äquivalenzrelation ist. Was ist die anschauliche Bedeutung der Formeln (4)–(8), wenn man E als (Modellierung der) Gleichheit betrachtet? Können Sie ein kleinstmögliches Modell von (1)–(7) angeben?

(b) Wandeln Sie die Formeln aus Φ in Skolemnormalform um.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass Φ unerfüllbar ist.

(E8.2)

Wir betrachten die Signatur $S = \{f, 0\}$ mit einem einstelligen Funktionssymbol f und einer Konstanten 0. Beginnend mit einem Element x einer S-Struktur betrachten wir die Folge $x, f(x), f^2(x), \ldots$ und untersuchen, wie lange es dauert bis der Wert 0 erreicht wird.

(a) Geben Sie für jedes $n > 0$ eine Formel $\varphi_n(x)$ an, die sagt, dass in der Folge $x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ der Wert 0 nicht vorkommt.

(b) Geben Sie eine Satzmenge Φ an, welche besagt, dass es für jedes $n > 0$ ein x gibt, so dass, wenn wir mit x beginnen, der Wert 0 frühestens nach n Schritten erreicht.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es keine Satzmenge Φ gibt, welche ausdrückt, dass für jedes x schließlich die 0 erreicht wird, d. h., dass es kein x gibt, so dass $f^n(x) \neq 0$ für alle n.

(Die Collatz-Vermutung behauptet, dass die durch die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(n) := \begin{cases} 3n+1 & \text{für ungerade } n\,, \\ n/2 & \text{für gerade } n\,, \end{cases}$$

erzeugte Folge für jede natürliche Zahl > 0 schließlich 1 ergibt. Bis jetzt konnte diese Vermutung weder bewiesen noch widerlegt werden.)