Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E7.1)

Seien

$$\begin{aligned}\varphi_1 &:= \forall x \neg Rxx\\ \varphi_2 &:= \forall x \forall y (Rxy \to Ryx)\\ \varphi_3 &:= \forall x (Rxfx \wedge Rxffx)\\ \varphi_4 &:= \exists x \exists y \exists z (Rxy \wedge Ryz \wedge Rxz)\end{aligned}$$

Wir wollen mit Resolution zeigen, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \varphi_4$.

(a) Bestimmen Sie eine Menge von aussagenlogische Formeln, die genau dann erfüllbar ist, wenn $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ das ist.

(b) Übersetzen Sie das Ergebnis aus (a) in Klauselform und beweisen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, daß die Formelmenge $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ unerfüllbar ist.

Hinweis. Überlegen Sie sich zu erst intuitiv, warum die Formelmenge nicht erfüllbar sein kann.

(c) Seien

$$\begin{aligned}\psi_1 &:= \forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \wedge z < y \wedge Pz))\\ \psi_2 &:= \exists x \forall y (y < x \to \neg Py)\\ \psi_3 &:= \exists x \forall y (\neg y < x)\end{aligned}$$

Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass $\psi_1, \psi_2 \models \psi_3$. Wandeln Sie dazu erst die Formeln $\psi_1, \psi_2, \neg\psi_3$ in Skolemnormalform um.

(E7.2)

Gegeben sei eine zweistellige Relation $\sim$ und die Aussage

$$\varphi \equiv \forall x\, x \sim x \ \wedge \ \forall x \forall y (x \sim y \to y \sim x) \ \wedge \ \forall x \forall y \forall z ((x \sim y \wedge y \sim z) \to x \sim z)$$

die besagt, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(a) Erweitern Sie $\{\varphi\}$ zu einer Satzmenge, die besagt, dass $\sim$ unendlich viele Äquivalenzklassen hat.

(b) Argumentieren Sie (mit dem Kompaktheitssatz), dass es keine Satzmenge gibt, die besagt, dass $\sim$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

(c) Schließen Sie aus (b), dass es keinen *einzelnen* Satz gibt, der besagt, dass $\sim$ unendlich viele Äquivalenzklassen hat.