Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E6.1)

Ein Meteorologe versucht die zeitliche Entwicklung des Wetters an einem bestimmten Ort mit folgender Signatur in FO zu beschreiben:

$$S = \{0, N, <, S, R\}.$$

0	Konstante für Starttag
N	1-stelliges Funktionssymbol für „nächster Tag“
$<$	2-stelliges Relationssymbol für die zeitliche Ordnung der Tage
S, R	1-stellige Relationssymbole für Sonne und Regen

(a) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in FO(S):

(i) Auf Regen folgt Sonnenschein.

(ii) Jeden zweiten Tag scheint die Sonne.

(iii) Wenn an einem Tag die Sonne scheint, gibt es innerhalb drei Tagen wieder Regen.

(iv) Regen dauert nie länger als drei Tage.

(v) Innerhalb einer Periode von vier Tagen regnet es an mindestens zwei Tagen.

(b) Schreiben Sie Ihre Lösungen in (a) in pränexe Normalform um.

(c) Führen Sie folgende Substitutionen durch und umschreiben Sie die Bedeutung der entstandenen Formeln in Worten.

(i) $\big[\exists y\, x < y \wedge Sy\big](NN0/x)$

(ii) $\big[\forall x \exists y\, x < y \wedge Sy\big](NNN0/x)$

(iii) $\big[x < y\big](NNz/x)(Nx/y)(NNNy/z)$

(iv) $\big[Sy \rightarrow \forall x\, (x < y \rightarrow Rx)\big](Nx/y)$

(d) Extra: N kann eliminiert werden. Wie können Sie jede Formel logisch äquivalent umformulieren in eine Formel ohne N?

(E6.2)

Betrachten Sie die folgenden universellen, gleichheitsfreien Sätze für 1-stellige Funktionssymbole h und v:

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x, y, z\, (x \sim x \wedge (x \sim y \to y \sim x) \wedge (x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)) \\ (2) & \forall x\, (h(v(x)) \sim v(h(x))) \\ (3) & \forall x, y\, (x \sim y \to (h(x) \sim h(y) \wedge v(x) \sim v(y)) \end{array}$$

Bemerkung: Man kann sich vorstellen, dass h und v als Skolemfunktionen für

$$\forall x\, (\exists y\, Hxy \wedge \exists y\, Vxy)$$

eingeführt wurden, und dass $\sim$ als Kongruenzrelation anstelle von $=$ fungiert um mit (2) auszudrücken, dass h und v kommutieren. Was bedeutet das für H und V?

(a) Sei $\mathcal{H} = (\mathcal{T}, h^{\mathcal{H}}, v^{\mathcal{H}}, \sim^{\mathcal{H}})$ eine Herbrand-Struktur. Beschreiben Sie die Trägermenge $\mathcal{T}$.

(b) Man kann die Teilmenge $\sim^{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ so wählen, dass die Herbrand-Struktur $\mathcal{H}$ ein Modell von (1–3) wird. Geben Sie die minimale und die maximale Lösung an. Gibt es auch noch andere Möglichkeiten?

(E6.3)

(a) Geben Sie für folgende FO-Formeln jeweils eine Skolemnormalform an:

  (i) $\forall x \exists y R x y$

  (ii) $\forall x (\forall y R y y \to \exists y R y f(x))$

(b) Geben Sie einige verschiedene Herbrandmodelle für die Skolemnormalformen aus (a) an.