

5. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II SS 2008

(E5.1) Betrachten Sie die Signatur $S = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$.

Zeigen Sie, dass in den folgenden S -Strukturen die Ordnung definierbar ist, d.h. dass es für jede der folgenden S -Strukturen \mathcal{A} eine Formel ohne das \leq -Symbol $\varphi(x, y)$ gibt, so dass

$$a \leq^{\mathcal{A}} a' \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a, a'].$$

(i) $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, \leq^{\mathbb{N}}, 0, 1)$

(ii) $\mathcal{P} = (\mathcal{P}X, \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, X)$

(iii) $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, \leq^{\mathbb{R}}, 0, 1)$

Extra: Überlegen Sie sich, warum die Ordnung der ganzen Zahlen (im Gegensatz zu (i)) nicht allein aus Addition und 0 definierbar sein kann.

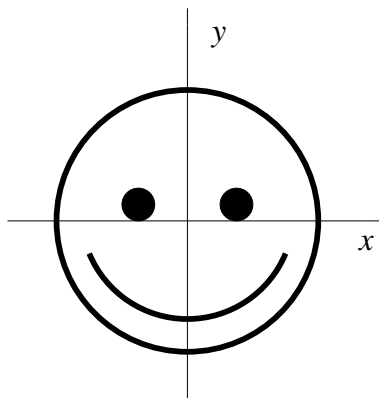
(E5.2)

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, -^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}}, 0, 1)$. Eine Formel $\varphi(x, y)$ definiert in \mathcal{R} die Relation

$$\varphi := \{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{R} \models \varphi[a, b] \}.$$

Geben Sie Formeln an, die die folgenden Relationen in \mathbb{R}^2 definieren:

- (i) Einen Kreis mit Radius 2 um den Ursprung.
- (ii) Eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $2/3$.
- (iii) Die Strecke, welche vom Punkt $(1, 2)$ bis zum Kreis aus (i) führt und senkrecht auf diesem steht.
- (iv) Einen Smiley.



(E5.3)

Zeigen Sie durch ein konkretes Gegenbeispiel, dass

$$\exists x \varphi \wedge \exists x \psi \not\equiv \exists x (\varphi \wedge \psi).$$

Überlegen Sie sich anhand des Semantikspiels warum Ihr Gegenbeispiel zeigt, dass die Formeln nicht äquivalent sind.