Fachbereich Mathematik
Martin Otto
Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik II
SS 2008

(E4.1) Eine *(nicht negative) Hornformel* ist eine Formel der Form

$$(q_1 \wedge \cdots \wedge q_n) \rightarrow q\,.$$

(Für $n = 0$ ergibt sich einfach q.)

Man beachte, dass eine (nicht negative) Hornformel $(q_1 \wedge \cdots \wedge q_n) \rightarrow q$ einer Klausel $\{\neg q_0, \ldots, \neg q_n, q\}$ entspricht, die genau ein positives Literal enthält. Solche Klauseln heißen *Hornklauseln.*

(a) Geben Sie alle Modelle der Menge

$$\Phi = \{p, (p \wedge q) \rightarrow r, p \rightarrow r, (p \wedge q) \rightarrow s, (p \wedge r) \rightarrow t, s \rightarrow t\}$$

an.

(b) Sei Φ eine Menge von nicht negativen Hornformeln und $\mathcal{I} := \{\mathfrak{J} : \mathfrak{J} \models \Phi\}$ die Menge aller ihrer Modelle. Wir definieren eine Interpretation $\mathfrak{J}_0$ durch

$$\mathfrak{J}_0(p) = 1 \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{J}(p) = 1 \text{ für alle } \mathfrak{J} \in \mathcal{I}\,.$$

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{J}_0$ ebenfalls ein Modell von Φ ist. Wir nennen $\mathfrak{J}_0$ das *minimale Modell* von Φ. (Warum?)

(c) Finden Sie eine Formelmenge Φ, die kein minimales Modell besitzt. (Φ kann also nicht nur aus nicht negativen Hornformeln bestehen.)

(d) $K := \big\{\{p\},\ \{\neg p \neg q, r\},\ \{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg q, s\},\ \{\neg p, \neg r, t\}, \{\neg s, t\}\big\}$ ist die Klauselmenge die zu der Menge der Hornformeln Φ aus (a) gehört.

Berechnen Sie $\mathrm{Res}^*(K)$.

(e) Sei Φ eine Menge von Hornformeln, K die dazugehörige Menge von Hornklauseln und $\mathfrak{J}_0$ das minimale Modell von Φ. Zeigen Sie, dass

(i) $\mathrm{Res}^*(K)$ nur Hornklauseln enhält (insbesondere also nicht die leere Klausel);

(ii) für jede Variable p, gilt

$$\{p\} \in \mathrm{Res}^*(K) \quad \text{gdw} \quad \mathfrak{J}_0(p) = 1\,.$$

Hinweis. Man überlege sich zunächst, daß

$$\mathfrak{J}_0(p) = 1 \quad \text{gdw} \quad \Phi \models p \quad \text{gdw} \quad \Box \in \mathrm{Res}^*(K \cup \{\neg p\})\,.$$

Die Richtung ($\Rightarrow$) folgt aus der Korrektheit des Resolutionskalküls, die Rückrichtung ($\Leftarrow$) aus der Vollständigkeit (siehe Lemma 5.5 bzw. Lemma 5.8).

(E4.2)

Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

(a) $\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(c) $\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)$