Inhaltsverzeichnis

3 Testprobleme

Wir betrachten für ein statistisches Experiment, gegeben durch $(\Omega, \mathfrak{A}, P^\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ und $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, ein Testproblem, gegeben durch die Hypothese

$$\emptyset \neq \Theta_0 \subsetneq \Theta$$

(„der unbekannte Parameter liegt in Θ_0“, „$\vartheta \in \Theta_0$“).

Bezeichnung. Die Menge $\Theta \setminus \Theta_0$ heißt *Alternative.*

Beispiel 1. Bei einer Maschine zur Produktion von Gewinderingen stellt sich die Frage: Wird in der Produktion ein Nennmaß μ_0 für den Innendurchmesser eingehalten? Die vorliegenden Daten sind die Innendurchmesser $x_1, \ldots, x_n$ von n Gewinderingen.

Wir nehmen an, daß diese Innendurchmesser eine Realisierung von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 sind. Zu unterscheiden sind zwei Fälle:

(i) Die Präzision der Maschine, gegeben durch σ^2, ist bekannt.

(ii) Die Präzision der Maschine ist unbekannt.

Definition 2. Ein Verwerfungsbereich $R_n \in \mathfrak{B}_n$ definiert einen *Signifikanztest* zum Niveau $\alpha \in]0, 1[$ (für die Hypothese Θ_0), falls

$$\forall \vartheta \in \Theta_0 : P^\vartheta(\{X \in R_n\}) \leq \alpha.$$

Bemerkung 3. Ein Verwerfungsbereich R_n legt folgende Entscheidung fest: man lehnt die Hypothese genau dann ab, wenn $x \in R_n$ gilt. Der Verwerfungsbereich definiert genau dann einen Signifikanztest zum Niveau α, wenn die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art für jedes $\vartheta \in \Theta_0$ durch α beschränkt ist, siehe Bemerkung 1.12.

Um kleine Wahrscheinlichkeiten für Fehler 2. Art zu erreichen, sucht man eine Signifikanztest zu gegebenem Niveau α, dessen Verwerfungsbereich R_n „möglichst groß“ ist. In dieser Vorlesung werden keine Optimalitätsaussagen der Testtheorie behandelt.

Bemerkung 4. Die Formulierung eines Testproblems ist symmetrisch in der Hypothese Θ_0 und der Alternative $\Theta \setminus \Theta_0$. Diese Symmetrie gilt nicht bei Signifikanztests. Signifikanztest zum Niveau α für

- „Θ_0 = schuldig“: Freispruch Schuldiger mit Wahrscheinlichkeit höchstens α.
- „Θ_0 = unschuldig“: Verurteilung Unschuldiger mit Wahrscheinlichkeit höchstens α.

Bemerkung 5. In der Regel (und oBdA) wählt man einen Verwerfungsbereich der Form

$$R_n := \{g_n \in K_n\}$$

mit einer Borel-meßbaren Abbildung $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und einer Menge $K_n \in \mathfrak{M}$. Die Zufallsvariable $g_n(X)$ heißt in diesem Kontext *Teststatistik* und K_n heißt *kritischer Bereich*. Hierdurch ist folgende Entscheidung festgelegt: Lehne die Hypothese genau dann ab, wenn $g_n(x) \in K_n$ gilt.

Man verwendet „plausible" Teststatistiken $g_n(X)$, deren Verteilungen $P^{\vartheta}_{g_n(X)}$ für $\vartheta \in \Theta_0$ (approximativ) bekannt sind.

Beispiel 6. Normalverteilungsannahme mit bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$. Fortsetzung von Fall (i) in Beispiel 1. Gegeben sei $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Entscheide, ob der unbekannte Erwartungswert gleich μ_0 ist. Formal wird dieses Testproblem definiert durch

$$\Theta := \mathbb{R}, \qquad P^{\mu}_{X_1} := \mathbf{N}(\mu, \sigma^2), \qquad \Theta_0 := \{\mu_0\}.$$

Wir verwenden

$$g_n(x) := \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$. Falls die Hypothese korrekt ist, ist $g_n(X)$ $\mathbf{N}(0,1)$-verteilt. Also gilt für jedes $k > 0$

$$P^{\mu_0}(\{|g_n(X)| \geq k\}) = 1 - \Phi(k) + \Phi(-k) = 2(1 - \Phi(k)).$$

Somit definiert

$$R_n := \{|g_n| \geq k\}$$

genau dann einen Signifikanztest zum Niveau α, wenn $2(1-\Phi(k)) \leq \alpha$ gilt, d.h. wenn

$$k \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Klar: die Fehlerwahrscheinlichkeiten 2. Art sind monoton wachsend in k. Man wählt also

$$k = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Speziell für $\alpha = 0.05$ ergibt sich $k = 1.96\ldots$.

Dies entspricht folgender Entscheidung: Lehne die Hypothese Θ_0 genau dann ab, wenn

$$\left|\overline{x}_n - \mu_0\right| \geq \sigma/\sqrt{n} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Vgl. Satz 2.25.

Bezeichnung. Die Vorgehensweise aus Beispiel 6 wird als *zweiseitiger Gauß-Test* bezeichnet.

Beispiel 7. Das entsprechende einseitige Testproblem ist gegeben durch

$$\Theta := \mathbb{R}, \qquad P^{\mu}_{X_1} := \mathbf{N}(\mu, \sigma^2), \qquad \Theta_0 := \left]-\infty, \mu_0\right],$$

siehe $\boxed{\text{Übung}}$.

Beispiel 8. Fortsetzung von Beispiel 1.13, Geschlecht eines Neugeborenen. Man widerlege die Annahme, daß Jungen und Mädchen mit gleicher Wahrscheinlichkeit geboren werden. Formal ist dieses Testproblem definiert durch

$$\Theta := \left]0, 1\right[, \qquad P^{p}_{X_1} = \mathbf{B}(1, p), \qquad \Theta_0 = \{1/2\}.$$

Als Teststatistik verwenden wir

$$g_n(X) := \frac{\overline{X}_n - 1/2}{1/(2\sqrt{n})} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot 1/2}{1/2 \cdot \sqrt{n}}.$$

Beachte, daß $n = 25\,171\,123$. Also „ist“ $g_n(X)$ bzgl. $P^{1/2}$ standard-normalverteilt. Deshalb führen wir einen Gauß-Test als sogenannten asymptotischen α-Niveau-Test durch: Lehne die Hypothese genau dann ab, wenn

$$\left|\overline{x}_n - 1/2\right| \geq 1/(2\sqrt{n}) \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha/2).$$

Für $n = 25\,171\,123$ gilt $1/(2\sqrt{n}) = 9.9 \ldots 10^{-5}$ und man erhält

α	$1/(2\sqrt{n}) \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$
10^{-2}	$2.56 \cdots 10^{-4}$
10^{-3}	$3.27 \cdots 10^{-4}$
10^{-20}	$9.30 \cdots 10^{-4}$

Für das empirische Mittel $\overline{x}_n = 0.4863\ldots$ der Daten gilt

$$|\overline{x}_n - 1/2| = 1.37 \cdots 10^{-2},$$

so daß die Hypothese für alle diese Werte α verworfen wird.

Bemerkung 9. Wir untersuchen die Wahrscheinlichkeiten für Fehler 2. Art bei einem zweiseitigen Gauß-Test, siehe Beispiel 6. Sei $\mu \neq \mu_0$ und

$$\mu_n := \sqrt{n} \cdot (\mu - \mu_0)/\sigma.$$

Dann ist $g_n(X)$ $\mathbf{N}(\mu_n, 1)$-verteilt bzgl. P^{μ} und

$$\begin{aligned} P^{\mu}(\{|g_n(X)| < k\}) &= P^{\mu}(\{-k - \mu_n < g_n(X) - \mu_n < k - \mu_n\}) \\ &= \Phi(k - \mu_n) - \Phi(-k - \mu_n) =: a_n(\mu). \end{aligned}$$

Es gilt:

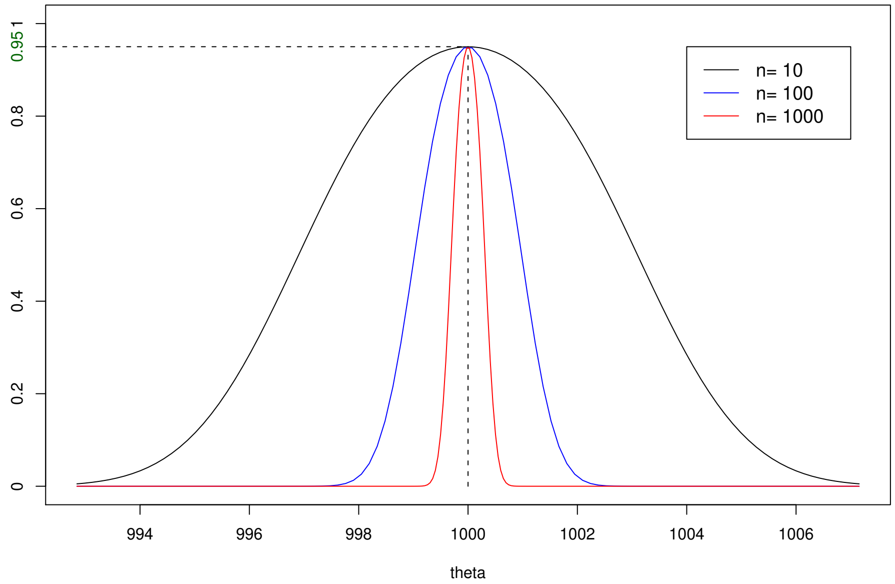

Abbildung VIII.6: Operationscharakteristiken des zweiseitigen Gauß-Tests für $\alpha := 0.05$

(i) Für jedes $\mu \neq \mu_0$ konvergiert $(a_n(\mu))_{n\in\mathbb{N}}$ sehr schnell gegen Null, siehe $\boxed{\text{Übung}}$.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sup_{\mu\in\Theta\setminus\Theta_0} a_n(\mu) = 1 - \alpha.$$

Vgl. Bemerkung 1.12.

Definition 10. Die *Operationscharakteristik* f eines durch Verwerfungsbereich $R_n \in \mathfrak{B}_n$ gegebenen Tests ist die durch

$$f(\vartheta) := P^\vartheta(\{X \notin R_n\})$$

definierte Abbildung $f : \Theta \to [0, 1]$.

Bemerkung 11.

(i) Die Abbildung $f|_{\Theta\setminus\Theta_0}$ liefert die Wahrscheinlichkeiten für Fehler 2. Art.

(ii) Ein Signifikanztest zum Niveau α ist durch $f|_{\Theta_0} \geq 1 - \alpha$ charakterisiert.

Beispiel 12. Abbildung VIII.6 zeigt für $n = 10, 100, 1000$ Operationscharakteristiken des zweiseitigen Gauß-Tests für $\Theta_0 := \{1000\}$, $\sigma^2 := 25$ und $\alpha := 0.05$.

Beispiel 13. Normalverteilungsannahme mit unbekannter Varianz. Fortsetzung von Fall (ii) in Beispiel 1. Gegeben sei $\mu_0 \in \mathbb{R}$. Entscheide, ob der unbekannte Erwartungswert gleich μ_0 ist. Formal wird dieses Testproblem definiert durch

$$\Theta := \mathbb{R} \times]0,\infty[\,, \qquad P_{X_1}^{(\mu,\sigma)} := \mathbf{N}(\mu,\sigma^2), \qquad \Theta_0 := \{\mu_0\} \times]0,\infty[\,.$$

Wir betrachten die durch

$$g_n(x) := \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sqrt{s_n^2/n}}.$$

definierte Teststatistik

$$g_n(X) := \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{v_n(X)/n}}.$$

Vgl. Satz 2.32.

Satz 14. Sei $t_{n-1;1-\alpha/2}$ das $(1-\alpha/2)$-Quantil von $\mathbf{t}_{n-1}$. Für das Testproblem aus Beispiel 13 definiert der Verwerfungsbereich

$$R_n := \{|g_n| \geq t_{n-1;1-\alpha/2}\}.$$

einen Signifikanztest zum Niveau α.

Beweis. Unter Verwendung von Lemma 2.31 schließt man wie in Beispiel 6. □

Bezeichnung. Die Vorgehensweise aus Satz 14 wird als *zweiseitiger t-Test* bezeichnet.

Wir betrachten nun für Zufallsexperimente mit Werten in einer endlichen Menge folgende Probleme. Teste,

(i) ob ein Zufallsexperiment einer gegebenen Verteilung genügt,

(ii) ob die Komponenten eines vektorwertigen Zufallsexperimentes unabhängig sind.

Beispiel 15.

(i) Teste, ob ein Würfel fair ist.

(ii) Teste, ob Einkommen und politische Präferenz unabhängig sind.

Im folgenden sei

$$\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^d$$

endlich und

$$\Theta = \Big\{(p_k)_{k\in M} \in [0,1]^M : \sum_{k\in M} p_k = 1\Big\}$$

die Menge aller Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf M. Für

$$\mathbf{p} = (p_k)_{k \in M} \in \Theta$$

sei die Verteilung von X_1 unter $P^{\mathbf{p}}$ gegeben durch

$$P^{\mathbf{p}}_{X_1}(\{k\}) = p_k \qquad k \in M.$$

Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß $X_1, \ldots, X_n$ nur Werte aus M annehmen. Zunächst untersuchen wir Fragestellung (i), wobei die Hypothese durch

$$\Theta_0 = \{\mathbf{p}^0\}$$

mit einer Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathbf{p}^0 \in \Theta$ mit $p_k^0 > 0$ für alle $k \in M$ definiert sei.

Beispiel 16. Man wählt $M := \{1, \ldots, 6\}$ und $p_k^0 := 1/6$ für $k \in M$ bei der Frage, ob ein Würfel fair ist. Siehe auch Beispiel 8.

Im folgenden gelte oBdA

$$M = \{1, \ldots, m\}$$

mit $m \geq 2$. Wir betrachten die absoluten Häufigkeiten der Werte $1, \ldots, m$ in einer Stichprobe und definiere dazu

$$H : M^n \to \mathbb{N}_0^m$$

durch

$$H_k(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{k\}}(x_i)$$

für $k = 1, \ldots, m$. Naheliegend ist folgendes Vorgehen: Verwerfung der Hypothese Θ_0, falls der „Abstand" von $1/n \cdot H(x_1, \ldots, x_n)$ und $\mathbf{p}^0$ „groß" ist.

Dazu: Bestimmung der Verteilung des Zufallsvektors $H(X)$.

Beispiel 17. Für $M := \{1, 2\}$ gilt

$$H_1(X) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{1_{\{1\}}(X_i)}_{=:X_i'}.$$

Aus $P^{\mathbf{p}}_{X_1'} = \mathbf{B}(1, p_1)$ folgt $H_1(X) \sim \mathbf{B}(n, p_1)$ bzgl. $P^{\mathbf{p}}$. Klar: $H_2(X) = n - H_1(X)$. Also folgt für $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$P^{\mathbf{p}}(\{H(X) = (k, n-k)\}) = \binom{n}{k} \cdot p_1^k \cdot p_2^{n-k}.$$

Bemerkung 18. Analog folgt allgemein, daß $H_k(X) \sim \mathbf{B}(n, p_k)$ bzgl. $P^{\mathbf{p}}$ gilt. Man beachte, daß die Komponenten $H_k(X)$ des Zufallsvektors $H(X)$ nicht unabhängig sind.

Satz 19. Für $\mathbf{p} \in \Theta$ und $h \in \mathbb{N}_0^m$ gilt

$$P^{\mathbf{p}}(\{H(X) = h\}) = n! \cdot \prod_{k=1}^{m} \frac{p_k^{h_k}}{h_k!},$$

falls $\sum_{k=1}^m h_k = n$. Andernfalls gilt $P^{\mathbf{p}}(\{H(X) = h\}) = 0$.

Beweis. Offenbar gilt $P^{\mathbf{p}}(\{H(X) = h\}) = 0$, falls $\sum_{k=1}^m h_k \neq n$. Im folgenden gelte $\sum_{k=1}^m h_k = n$. Für $x \in M^n$ mit $H(x) = h$ ergibt sich

$$P^{\mathbf{p}}(\{X = x\}) = p_{x_1} \cdots p_{x_n} = \prod_{k=1}^{m} p_k^{h_k}.$$

Die Anzahl der Stichproben mit absoluten Häufigkeiten h_k ist gegeben durch

$$\begin{aligned} |\{x \in M^n : H(x) = h\}| &= \binom{n}{h_1} \cdot \binom{n-h_1}{h_2} \cdots \binom{n-(h_1+\cdots+h_{m-1})}{h_m} \\ &= \frac{n!}{h_1! \cdots h_m!}. \end{aligned}$$

Fazit:

$$P^{\mathbf{p}}(\{H(X) = h\}) = \sum_{x \in M^n,\ H(x)=h} P^{\mathbf{p}}(\{X = x\}) = n! \cdot \prod_{k=1}^{m} \frac{p_k^{h_k}}{h_k!}.$$

□

Definition 20. Ein m-dimensionaler Zufallsvektor Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist *multinomialverteilt* mit Parametern $n, m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{p} \in [0,1]^m$, wobei $\sum_{k=1}^m p_k = 1$, falls

$$P(\{Y = y\}) = \begin{cases} n! \cdot \prod_{k=1}^m \frac{p_k^{y_k}}{y_k!}, & \text{falls } y \in \mathbb{N}_0^m \text{ mit } \sum_{k=1}^m y_k = n \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Bez.: $Y \sim \mathbf{M}(n, m, \mathbf{p})$.

Bemerkung 21. Satz 19 zeigt, daß $H(X) \sim \mathbf{M}(n, m, \mathbf{p})$ bzgl. $P^{\mathbf{p}}$ gilt.

Beispiel 22. Wir betrachten 12 Würfe eines fairen Würfels. Für

$$n := 12, \qquad m := 6, \qquad \mathbf{p} := (1/6, \ldots, 1/6)$$

gilt

$$\mathbf{M}(12, 6, \mathbf{p})(\{(3,0,0,2,6,1)\}) = \frac{12!}{3! \cdot 2! \cdot 6!} \cdot 6^{-12} = 2.54 \ldots 10^{-5}$$

und

$$\mathbf{M}(12, 6, \mathbf{p})(\{(2,2,2,2,2,2)\}) = \frac{12!}{2^6} \cdot 6^{-12} = 3.43 \ldots 10^{-3}.$$

Bemerkung 23. Satz 19 ermöglicht prinzipiell die Konstruktion eines Signifikanztests zum Niveau α für $\Theta_0 = \{\mathbf{p}^0\}$: Wähle eine (möglichst kleine endliche) Menge $A \subset \mathbb{N}_0^m$ mit

$$P^{\mathbf{p}^0}(\{H(X) \in A\}) \geq 1 - \alpha,$$

und verwende den Verwerfungsbereich

$$R_n := \{H \notin A\}.$$

Dieses Prinzip ist allgemeine bei diskreten Teststatistiken anwendbar.

Beispiel 24. Wir betrachten Multinomialverteilungen mit

$$m := 3.$$

In den Abbildungen VIII.7 und VIII.9 ist

$$(h_1, h_2) \mapsto M(n, m, \mathbf{p})(\{(h_1, h_2, n - (h_1 + h_2)\}) \tag{1}$$

für $\mathbf{p} := (1/4, 1/4, 1/2)$ und $n := 10$ bzw. $n := 50$ (mit Interpolation) dargestellt. Optimale Wahlen der Verwerfungsbereiche für $\alpha = 0.05$ sind in den Abbildung VIII.8 und VIII.10 dargestellt: verwirf die Hypothese genau dann, wenn (h_1, h_2) „schwarz markiert" ist. Auf diese Weise erhält man

$$P^{\mathbf{p}^0}(\{X \in R_n\}) = 0.0488\ldots$$

für $n = 10$ und

$$P^{\mathbf{p}^0}(\{X \in R_n\}) = 0.0497\ldots$$

für $n = 50$.

Abbildung VIII.11 zeigt (1) für $n = 10$ und $\mathbf{p} = (1/8, 3/8, 1/2)$.

Nachteile der Vorgehensweise gemäß Bemerkung 23: Abhängigkeit von n, m und $\mathbf{p}^0$ und hoher Rechenaufwand, falls n groß. Deshalb: asymptotischer α-Niveau-Test, siehe auch Beispiel 8. Beachte: $H = H^{(n)}$ und $X = X^{(n)}$ hängen von n ab.

Wir definieren $Q = Q^{(n)} : \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{R}$ durch

$$Q^{(n)}(h) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(h_k - n \cdot p_k^0)^2}{n \cdot p_k^0}$$

und betrachten die Teststatistik $Q(H(X)) = Q^{(n)}(H^{(n)}(X^{(n)}))$. Als partielle Motivation halten wir fest, daß das starke Gesetz der großen Zahlen zeigt, daß

$$\lim_{n \to \infty} H_k(X)/n = P^{\mathbf{p}^0}(\{X_1 = k\}) = p_k^0$$

$P^{\mathbf{p}^0}$-f.s. gilt.

Wir untersuchen die Konvergenz der Verteilung von $Q(H(X))$ bzgl. $P^{\mathbf{p}^0}$ für $n \to \infty$.

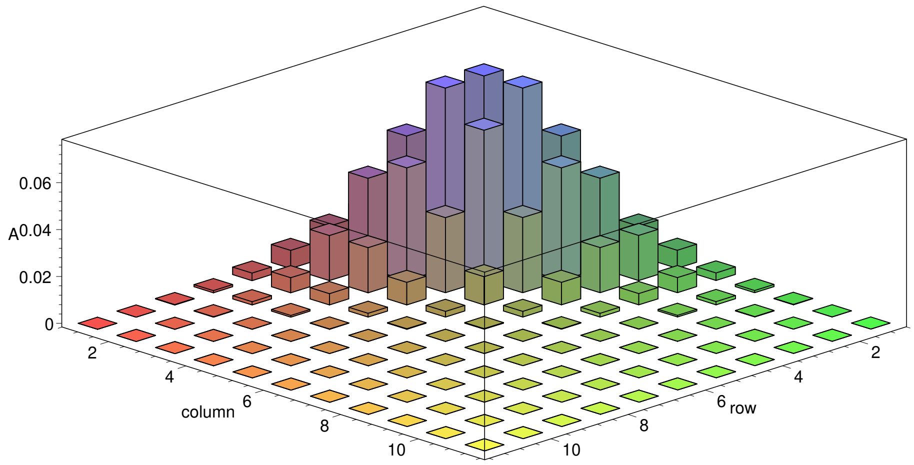

Abbildung VIII.7: Multinomialverteilung mit $n := 10$, $m := 3$, $\mathbf{p} := (1/4, 1/4, 1/2)$

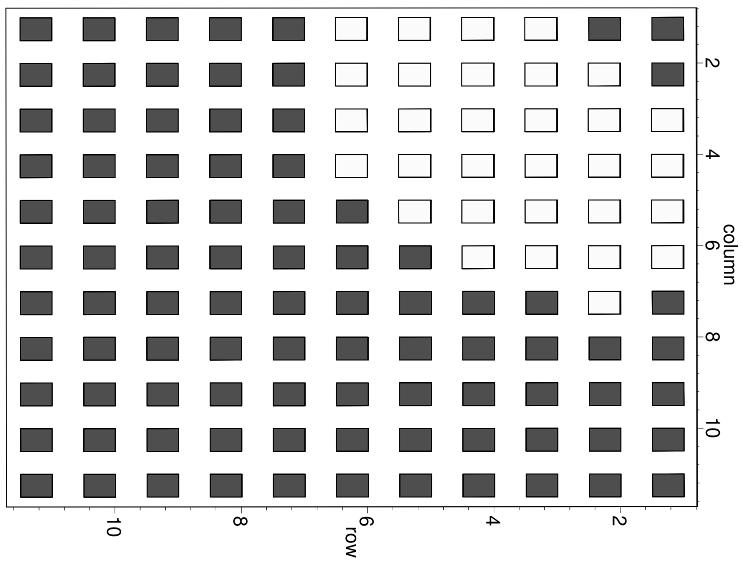

Abbildung VIII.8: Verwerfungsbereich in der Situation von Abb. VIII.7 für $\alpha := 0.05$

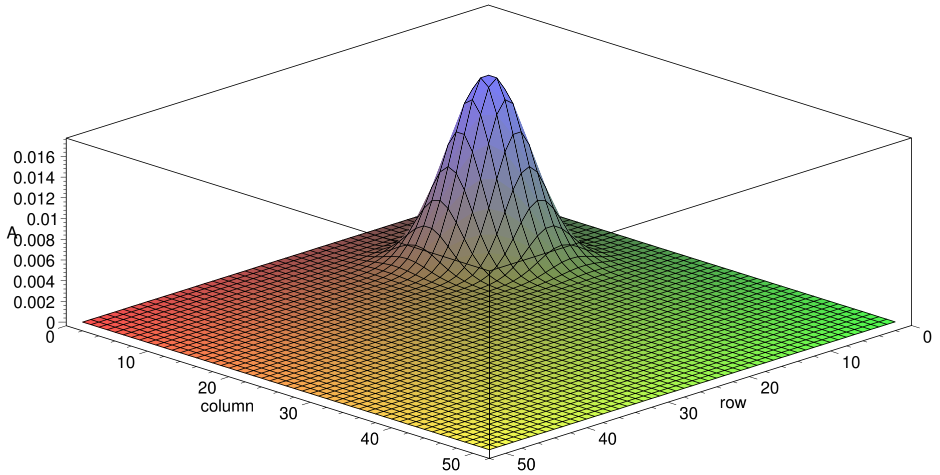

Abbildung VIII.9: Multinomialverteilung mit $n := 50$, $m := 3$, $\mathbf{p} := (1/4, 1/4, 1/2)$

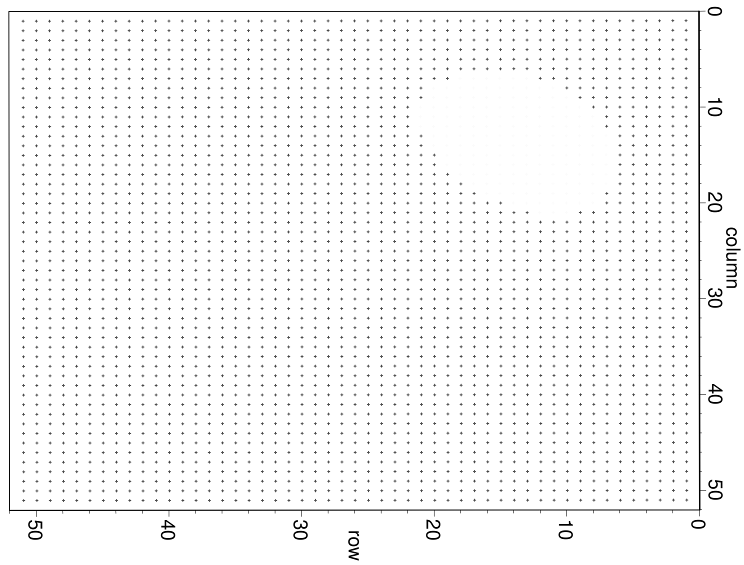

Abbildung VIII.10: Verwerfungsbereich in der Situation von Abb. VIII.9 für $\alpha := 0.05$

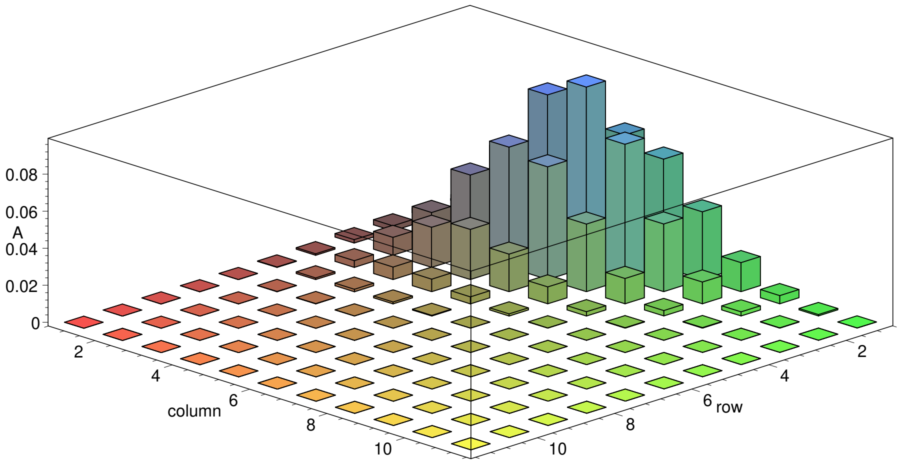

Abbildung VIII.11: Multinomialverteilung mit $n := 10$, $m := 3$, $\mathbf{p} := (1/8, 3/8, 1/2)$

Definition 25. Sei $d \in \mathbb{N}$. Eine Zufallsvariable Y mit Dichte

$$f_Y(x) = \frac{1}{2^{d/2} \cdot \Gamma(d/2)} \cdot x^{d/2-1} \cdot \exp(-x/2), \qquad x > 0,$$

und $f_Y(x) = 0$ für $x \leq 0$ heißt χ^2-*verteilt* mit d Freiheitsgraden. Bez.: $Y \sim \chi^2_d$.

Bemerkung 26. Für iid Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_d$ mit $Y_1 \sim \mathbf{N}(0,1)$ und $Y := \sum_{i=1}^d Y_i^2$ gilt $Y \sim \chi^2_d$. Siehe Krengel (2000, §14).

Abbildung VIII.12 zeigt die Dichten von χ^2_d für $d = 1, 2, 4, 6$.

Satz 27. Gelte

$$Z_n \sim \mathbf{M}(n, m, \mathbf{p})$$

für $m \geq 2$ und $\mathbf{p} \in [0,1]^m$, wobei $\sum_{k=1}^m p_k = 1$, sowie

$$Y \sim \chi^2_{m-1}.$$

Dann folgt

$$Q^{(n)}(Z_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} Y.$$

Beweis. Siehe Krengel (2000, §14). $\square$

Satz 28. Sei $\chi^2_{m-1;1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der χ^2-Verteilung mit $m-1$ Freiheitsgraden. Dann definiert der Verwerfungsbereich

$$R_n := \{Q^{(n)} \circ H^{(n)} \geq \chi^2_{m-1;1-\alpha}\}$$

einen Signifikanztest zum asymptotischen Niveau α für $\Theta_0 = \{\mathbf{p}^0\}$, d.h.

$$\lim_{n \to \infty} P^{\mathbf{p}^0}(\{X^{(n)} \in R_n\}) = \alpha.$$

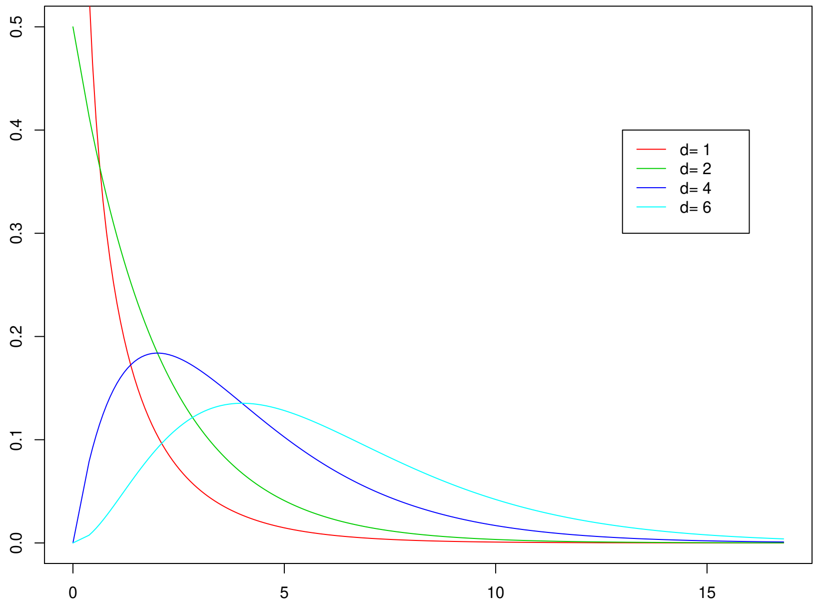

Abbildung VIII.12: Dichten von χ^2-Verteilungen

Beweis. Sei F die Verteilungsfunktion von χ^2_{m-1}. Es gilt

$$\{X^{(n)} \in R_n\} = \{Q^{(n)}(H^{(n)}(X^{(n)})) \geq \chi^2_{m-1;1-\alpha}\}.$$

Da F stetig ist, folgt mit den Sätzen 19 und 27

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mathbf{p}^0}(\{X^{(n)} \in R_n\}) = 1 - F(\chi^2_{m-1,1-\alpha}) = \alpha.$$

$\square$

Bezeichnung. Die Vorgehensweise aus Satz 28 wird als χ^2-*Anpassungstest* bezeichnet.

Beispiel 29. Wir betrachten die Situation aus Beispiel 24 mit der Hypothese $\Theta_0 = \{\mathbf{p}^0\}$ für $m := 3$ und für $\mathbf{p}^0 := (1/4, 1/4, 1/2)$.
Wir wählen $\alpha := 0.05$ und erhalten $\chi^2_{m-1;1-\alpha} = 5.99\ldots$. Für $n := 10$ und

$$H(x_1, \ldots, x_n) := (0, 1, 9)$$

ergibt sich

$$Q(H(x_1, \ldots, x_n)) = 33/5 = 6.6 \geq \chi^2_{m-1;1-\alpha},$$

so daß der χ^2-Anpassungstest die Hypothese Θ_0 verwirft. Für $n := 50$ und

$$H(x_1, \ldots, x_n) := (9, 15, 26)$$

ergibt sich

$$Q(H(x_1, \dots, x_n)) = 38/25 = 1.52 < \chi^2_{m-1;1-\alpha},$$

so daß der χ^2-Anpassungstest die Hypothese Θ_0 nicht verwirft.

Bemerkung 30. Der χ^2-Anpassungstest läßt sich nach einer Diskretisierung auch im Falle absolutstetiger Verteilungen auf $\mathbb{R}^d$ anwenden. Zum Testen der Hypothese, daß die unbekannte Verteilung von X_1 gleich P_0 ist, wählen wir $m \in \mathbb{N}$ und p.d. Mengen $B_k \in \mathfrak{B}_d$ mit $\bigcup_{k=1}^m B_k = \mathbb{R}^d$. Wir setzen

$$X_i' := \sum_{k=1}^m k \cdot 1_{B_k}(X_i)$$

und betrachten als neue und schwächere Hypothes $\Theta_0 = \{\mathbf{p}^0\}$ mit

$$p_k^0 := P_0(B_k).$$

Beispiel 31. Wir illustrieren dieses Vorgehen anhand folgender Frage: Liefert ein Zufallszahlengenerator auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallszahlen? Hier gilt $P_0 := \mathbf{U}([0, 1])$. Wir wählen

$$B_1 := \left]-\infty, 1/m\right], \qquad B_m := \left]1 - 1/m, \infty\right[$$

und für $k = 2, \dots, m-1$

$$B_k := \left](k-1)/m, k/m\right].$$

Somit gilt für $k = 1, \dots, m$

$$p_k^0 := P_0(B_k) = 1/m.$$