Inhaltsverzeichnis

Abschließend: Vergleich der Konvergenzbegriffe im Starken und Schwachen Gesetz der großen Zahlen. Anwendung des folgenden Resultates mit $Y_n := S_n/n - \mathrm{E}(X_1)$.

Satz 12. Gilt fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = 0$$

für eine Folge von Zufallsvariablen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|Y_n| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Beweis. $\boxed{\text{Übung}}$. Siehe auch $\boxed{\text{Übung}}$. □

3 Zentraler Grenzwertsatz

Beispiel 1. Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$ für $p \in]0,1[$. Bestimme ein Intervall um $\mathrm{E}(S_n)$, das S_n mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit $\alpha \in]0,1[$ enthält.
Es gilt

$$P(\{|S_n - \mathrm{E}(S_n)| \leq \delta\}) = \sum_{k\in K_n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

mit

$$K_n := \{k \in \{0,\dots,n\} : |k - n\cdot p| \leq \delta\}.$$

Für jede Folge von Zahlen $\delta_n > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n/\sqrt{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\{|S_n - \mathrm{E}(S_n)| \leq \delta_n\}) = 0,$$

siehe $\boxed{\text{Übung}}$, und, unter den allgemeinen Voraussetzungen von Satz 1.2,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n/\sqrt{n} = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\{|S_n - \mathrm{E}(S_n)| \leq \delta_n\}) = 1.$$

Dies motiviert die Untersuchung des Falls $\delta_n = c\cdot\sqrt{n}$ mit einer Konstanten $c > 0$.
Analog für einfache Irrfahrten, siehe Abbildungen VII.17–VII.21.

Im folgenden bezeichne φ die Dichte der Standard-Normalverteilung und Φ die zugehörige Verteilungsfunktion.

Satz 2 (Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace)**.** Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$ für $p \in]0,1[$. Setze

$$\sigma_n := \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}.$$

Dann gilt für alle $u < v$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{u\cdot\sigma_n \leq S_n - \mathrm{E}(S_n) \leq v\cdot\sigma_n\}) = \Phi(v) - \Phi(u).$$

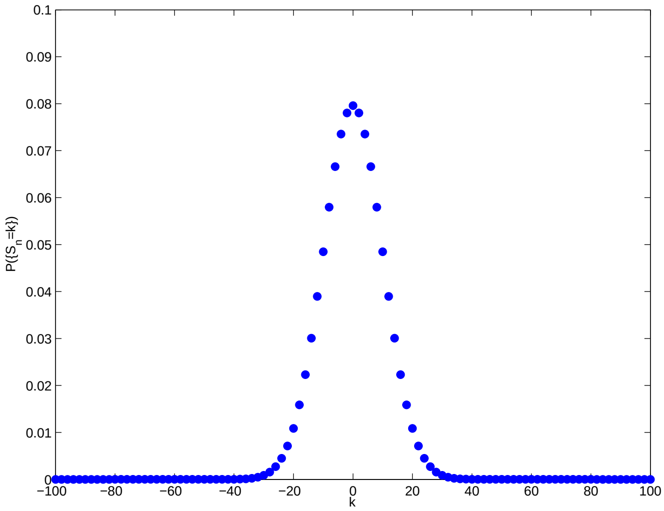

Abbildung VII.17: Symmetrische Bernoulli-Irrfahrt, Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 100$

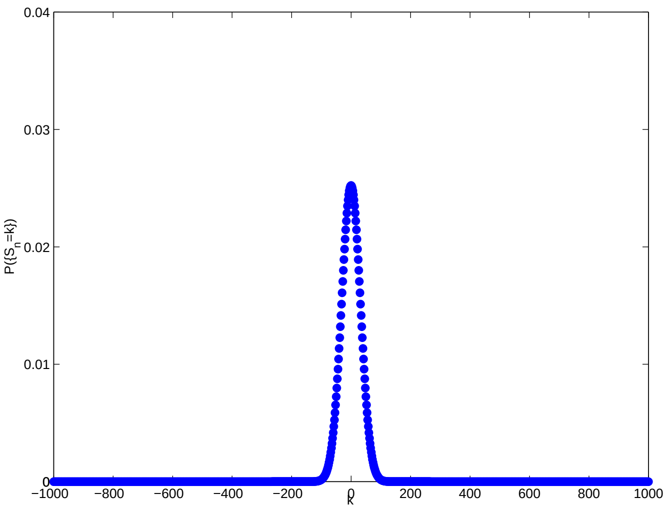

Abbildung VII.18: Symmetrische Bernoulli-Irrfahrt, Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 1000$

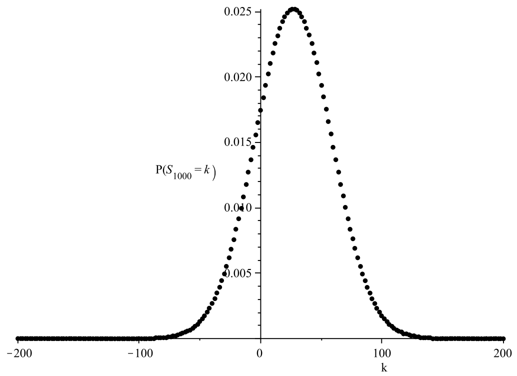

Abbildung VII.19: Einfache Irrfahrt, $p = 19/37$, Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 1000$

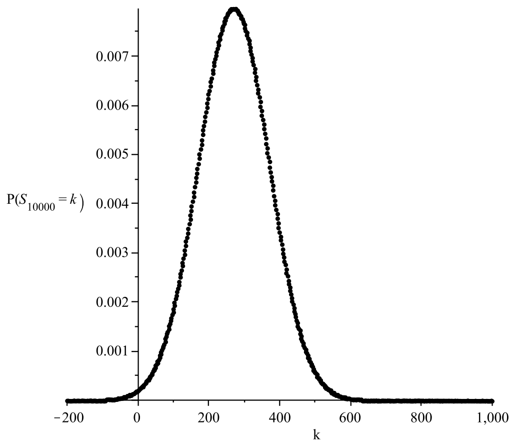

Abbildung VII.20: Einfache Irrfahrt, $p = 19/37$, Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 10\,000$

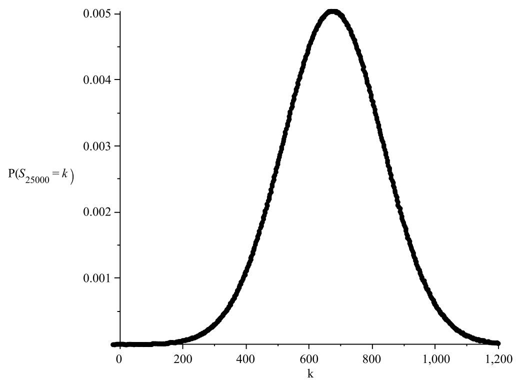

Abbildung VII.21: Einfache Irrfahrt, $p = 19/37$, Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 25\,000$

Beweis. Vgl. Beweis von Satz III.5.19. Fixiere $u < v$ und setze

$$b_{n,k} := \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

und

$$x_{n,k} := \frac{k - n \cdot p}{\sigma_n}$$

für $k \in \{0, \ldots, n\}$ sowie

$$K_n := \{k \in \{0, \ldots, n\} : u \leq x_{n,k} \leq v\}.$$

Klar

$$P(\{u \cdot \sigma_n \leq S_n - \mathrm{E}(S_n) \leq v \cdot \sigma_n\}) = \sum_{k \in K_n} b_{n,k}.$$

Bestimme die Asymptotik von $b_{n,k}$ gleichmäßig für $k \in K_n$. Lemma III.5.14 sichert

$$\lim_{n \to \infty} \max_{k \in K_n} \left| \frac{\sigma_n \cdot b_{n,k}}{c_{n,k}} - 1 \right| = 0$$

mit

$$c_{n,k} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{n \cdot p}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{n \cdot (1-p)}{n-k}\right)^{n-k}.$$

Setze

$$h(y) := y \cdot \ln(y/p) + (1-y) \cdot \ln((1-y)/(1-p)), \qquad y \in \left]0,1\right[.$$

Dann

$$\sqrt{2\pi} \cdot c_{n,k} = \exp(-n \cdot h(k/n)).$$

Nun: Taylor-Entwicklung von h um p. Man verifiziert $h(p) = h'(p) = 0$ und $h''(p) = 1/(p \cdot (1-p))$, so daß

$$\max_{k \in K_n} \left| h(k/n) - \frac{x_{n,k}^2}{2 \cdot n} \right| \leq M \cdot n^{-3/2}$$

mit einer Konstanten $M > 0$ gilt. Es folgt

$$\lim_{n \to \infty} \max_{k \in K_n} \left| \frac{c_{n,k}}{\varphi(x_{n,k})} - 1 \right| = 0.$$

Fazit:

$$\lim_{n \to \infty} \max_{k \in K_n} \left| \frac{\sigma_n \cdot b_{n,k}}{\varphi(x_{n,k})} - 1 \right| = 0. \tag{1}$$

Ferner gilt

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k \in K_n} \frac{1}{\sigma_n} \cdot \varphi(x_{n,k}) = \Phi(v) - \Phi(u) \tag{2}$$

aufgrund der Stetigkeit von φ.

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3. Gleichung (1) besagt, daß reskalierte Gewichte von Binomialverteilungen lokal gleichmäßig gegen die Normalverteilungsdichte konvergieren.

Beispiel 4. Fortsetzung von Beispiel 1. Für $\delta_n := q \cdot \sigma_n$ gilt aufgrund von Satz 2

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|S_n - \mathrm{E}(S_n)| \le \delta_n\}) = \Phi(q) - \Phi(-q) = 2 \cdot \Phi(q) - 1.$$

Wähle

$$q := \Phi^{-1}((1+\alpha)/2)$$

als $(1+\alpha)/2$-Quantil der Standard-Normalverteilung. Approximativ leistet dann

$$\delta_n := q \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{n}$$

das Verlangte, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|S_n - \mathrm{E}(S_n)| \le \delta_n\}) = \alpha. \tag{3}$$

Beispielsweise gilt $q = 1.645\ldots$ für $\alpha = 0.9$, $q = 2.576\ldots$ für $\alpha = 0.99$ und $q = 3.291\ldots$ für $\alpha = 0.999$.

Ebenso gilt (3) für die einfache Irrfahrt $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Wahl

$$\delta_n := q \cdot 2\sqrt{p \cdot (1-p)} \cdot \sqrt{n}.$$

Für $n = 10^6$ Runden des einfachen Spiels beim Roulette, d.h. für $p = 19/37$, erhalten wir somit approximativ, daß

$$23\,737 \le S_n \le 30\,316$$

mit der Wahrscheinlichkeit 0.999 gilt.

Den Sätzen III.4.12, III.5.19, 2 sowie Übung 6:G8 liegt ein gemeinsamer Konvergenzbegriff zugrunde.

Bezeichnung. $\mathfrak{C}_Z = \{x \in \mathbb{R} : F_Z \text{ stetig in } x\}$ *Menge der Stetigkeitspunkte* der Verteilungsfunktion F_Z von Z.

Beispiel 5. Für $Z \sim \mathbf{U}([a,b])$ und $Z \sim \mathbf{N}(\mu,\sigma^2)$ gilt $\mathfrak{C}_Z = \mathbb{R}$. Für $Z \sim \mathbf{B}(n,p)$ mit $p \in \,]0,1[$ gilt $\mathfrak{C}_Z = \mathbb{R} \setminus \{0,\ldots,n\}$.

Definition 6. Eine Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen *konvergiert in Verteilung* gegen eine Zufallsvariable Z, falls

$$\forall x \in \mathfrak{C}_Z : \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(x) = F_Z(x)$$

Bez.: $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$

Beispiel 7. Für $Z_n = a_n$ und $Z = a$ mit $a, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Beachte: Aus $a_n > a$ folgt $F_{Z_n}(a) = 0$, während $F_Z(a) = 1$.

Bemerkung 8. Es existiert eine Metrik ρ auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{B}_1$, so daß

$$Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(P_{Z_n}, P_Z) = 0,$$

siehe Vorlesung „Probability Theory“. In diesem Sinn beschreibt die Verteilungskonvergenz die Approximation stochastischer Modelle.

Lemma 9. Gelte $P(\{Z \in \mathbb{Z}\}) = P(\{Z_n \in \mathbb{Z}\}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} : \lim_{n\to\infty} P(\{Z_n = k\}) = P(\{Z = k\}).$$

Beweis. Siehe Übung 8:H33. □

Beispiel 10. Zum rein diskreten Fall:

(i) Gelte $Z_n \sim \mathbf{B}(n, p_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$. Dann $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$, falls $Z \sim \mathbf{P}(\lambda)$. Siehe Satz III.4.12.

(ii) Gelte $Z_n \sim \mathbf{H}(n, n_0(n), k)$ mit $n_0(n) \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lim_{n\to\infty} n_0(n)/n = p \in\ ]0, 1[$. Dann $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$, falls $Z \sim \mathbf{B}(k, p)$. Siehe Übung 6:G8

Beispiel 11. Zum Übergang diskret/kontinuierlich:

(i) Sei X_{2n} die Anzahl der Führungszeitpunkte bei einer symmetrischen Bernoulli-Irrfahrt der Länge $2n$ und sei

$$Z_{2n} = \frac{X_{2n}}{2n}.$$

Dann $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$, falls Z arcussinus-verteilt. Siehe Satz III.5.19.

(ii) Sei $S_n \sim \mathbf{B}(n, p)$ mit $p \in\ ]0, 1[$ und

$$Z_n := \frac{S_n - n \cdot p}{\sigma_n}.$$

Dann $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$, falls $Z \sim \mathbf{N}(0, 1)$. Siehe Satz 2.

Lemma 12. Sei F_Z stetig und gelte $Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$. Dann

(i) $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{Z_n}(x) - F_Z(x)| = 0$,

(ii) $\forall A \in \mathfrak{M} : \lim_{n\to\infty} P(\{Z_n \in A\}) = P(\{Z \in A\})$.

Beweis. Ad (i): $\boxed{\text{ÜBUNG}}$.
Ad (ii): Gilt nach Definition für $A =]-\infty, x]$. Für $A = \{x\}$ und $\varepsilon > 0$

$$P(\{Z_n \in A\}) \le P(\{x - \varepsilon < Z_n \le x\}) = P(\{Z_n \le x\}) - P(\{Z_n \le x - \varepsilon\}).$$

Somit

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} P(\{Z_n \in A\}) \le F_Z(x) - F_Z(x - \varepsilon).$$

Aufgrund der Stetigkeit von F_Z in x folgt

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Z_n \in A\}) = 0 = P(\{Z \in A\}).$$

□

Bemerkung 13. Die Aussage von Lemma 12.(ii) gilt im allgemeinen nicht für alle $A \in \mathfrak{B}_1$, wie Beispiel 11 zeigt.

Satz 2 erweist sich als Spezialfall einer Konvergenzaussage, die unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gilt.

Satz 14 (Zentraler Grenzwertsatz)**.** Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid und $X_1 \in \mathfrak{L}_2$ mit

$$\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}(X_1)} > 0.$$

Setze $\mu := \mathrm{E}(X_1)$ sowie

$$S_n^* := \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}}.$$

Dann gilt $S_n^* \xrightarrow{\mathrm{d}} Z$, falls $Z \sim \mathbf{N}(0,1)$.

Beweis. Irle (2001, Kap. 12) und Vorlesung „Probability Theory". □

Bezeichnung. Die Zufallsvariablen S_n^* heißen *standardisierte Summenvariablen.*

Bemerkung 15. Es gilt $\mathrm{E}(S_n^*) = 0$ und $\mathrm{Var}(S_n^*) = 1$ sowie

$$S_n^* = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{X_i - \mathrm{E}(X_i)}{\sigma \cdot \sqrt{n}}}_{=:X_i^*}$$

mit $\mathrm{E}(X_i^*) = 0$ und $\mathrm{Var}(X_i^*) = 1/n$. Der zentrale Grenzwertsatz besagt also grob: „Ein Gesamteffekt, der Summe vieler kleiner zentrierter unabhängiger Einzeleffekte ist, ist näherungsweise normalverteilt."

Die Abbildungen VII.22 und VII.23 illustrieren den Zentralen Grenzwertsatz für Summen exponentialverteilter Zufallsvariablen.

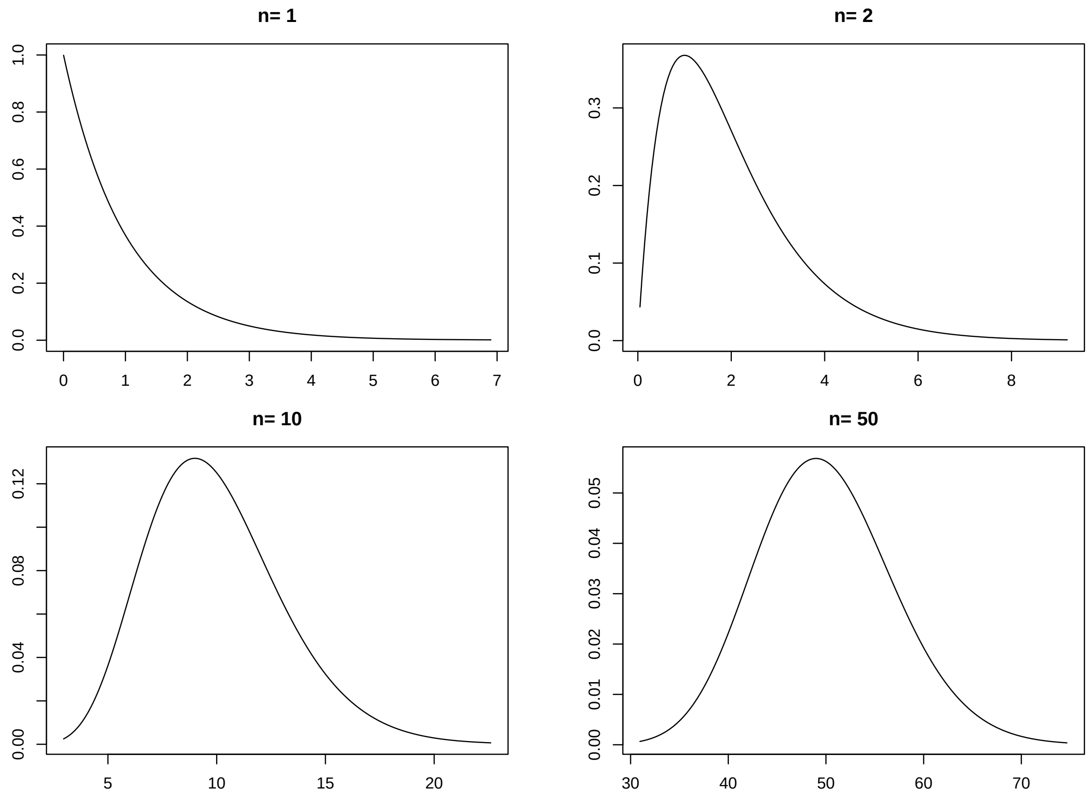

Abbildung VII.22: Dichten von Summen n unabhängiger $\mathbf{Exp}(1)$-verteilter Zufallsvariablen

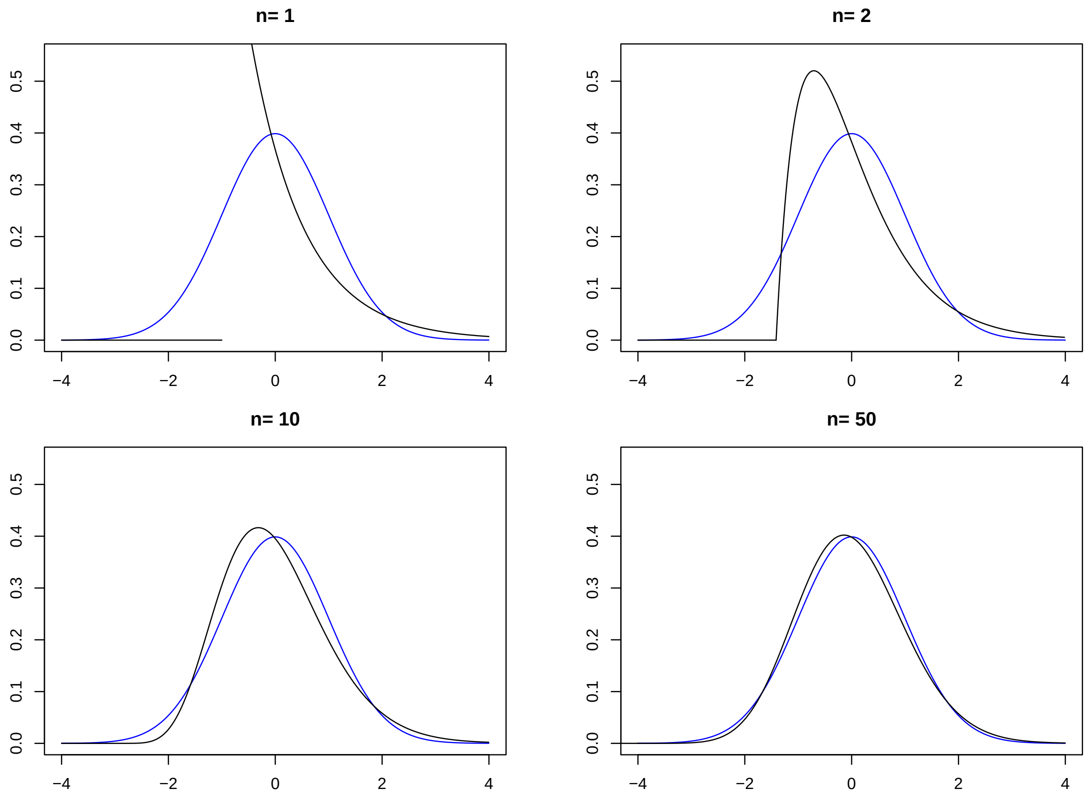

Abbildung VII.23: Dichten von standardisierten Summen n unabhängiger **Exp**(1)-verteilter Zufallsvariablen

Beispiel 16. Überbuchung von Flugverbindungen:

- Kapazität $K \in \mathbb{N}$
- Buchungsanzahl $n \in \mathbb{N}$, wobei die Passagiere unabhängig jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p \in \,]0,1[$ erscheinen

Gegeben $\alpha \in \,]0,1[$. Bestimme $n \in \mathbb{N}$, so daß eine Überbuchung ungefähr mit Wahrscheinlichkeit α auftritt.
Modell: $X_1, \dots, X_n$ iid, $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$.
Es gilt $\left\{\sum_{i=1}^n X_i > K\right\} = \{S_n^* > c_n\}$ mit

$$\begin{aligned} S_n^* &:= \sum_{i=1}^n (X_i - p)/\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}, \\ c_n &:= (K - n \cdot p)/\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}. \end{aligned}$$

Somit ist c_n näherungsweise durch $c_n = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ gegeben.
Für $K := 1000$, $p := 0.9$ und $\alpha := 0.01$ ergibt sich näherungsweise $c_n = 2.33$ und

$$n = 1086.$$

Hiermit gilt für die erwartete Anzahl nicht beförderter Passagiere

$$\mathrm{E}\Big(\max(\sum_{i=1}^n X_i - K, 0)\Big) \le 86 \cdot P\Big(\Big\{\sum_{i=1}^n X_i > K\Big\}\Big) \doteq 0.86.$$

Zum Vergleich die exakten Werte

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big(\max(\sum_{i=1}^n X_i - K, 0)\Big) &= 0.0287\dots, \\ P\Big(\Big\{\sum_{i=1}^n X_i > K\Big\}\Big) &= 0.00811\dots, \\ 86 \cdot P\Big(\Big\{\sum_{i=1}^n X_i > K\Big\}\Big) &= 0.697\dots \end{aligned}$$

Schließlich stellen wir einige Eigenschaften der Normalverteilung zusammen.

Satz 17. Für $a, b, \mu, \mu_i \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $\sigma, \sigma_i \in \,]0, \infty[$ gilt

(i) Falls $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$, dann $a \cdot X + b \sim \mathbf{N}(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2)$.

(ii) Falls $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und $X_i \sim \mathbf{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, dann $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu := \sum_{i=1}^n \mu_i$ und $\sigma^2 := \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

Beweis. Ad (i): $\boxed{\text{ÜBUNG}}$.

Ad (ii): $\boxed{\text{ÜBUNG}}$. □

Bemerkung 18. Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid. Gilt $X_1 \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\sigma^2 > 0$, so folgt $S_n^* \sim \mathbf{N}(0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, siehe Satz 17.

Definitionen und Bezeichnungen