

Inhaltsverzeichnis

I	Grundbegriffe	1
1	Wahrscheinlichkeitsräume	1
2	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit	7
3	Reellwertige Zufallsvariablen	11
II	Stochastische Simulation	17
1	Die Methode der direkten Simulation	17
2	Zufallszahlen	19
3	Die Inversionsmethode	24
III	Diskrete Modelle	27
1	Wahrscheinlichkeitsfunktionen	27
2	Elementare Kombinatorik	28
3	Produkt Räume	31
4	Diskrete Zufallsvariablen	33
5	Die symmetrische Bernoulli-Irrfahrt	44
IV	Grundlagen allgemeiner Modelle	63
1	Die Borelsche σ -Algebra in \mathbb{R}^d	63
2	Das d -dimensionale Lebesgue-Maß	66
3	Verteilungen	68
V	Absolutstetige Modelle	73
1	Wahrscheinlichkeitsdichten	73
2	Absolutstetig verteilte Zufallsvariablen	74
VI	Erwartungswert und Varianz	83
1	Der Erwartungswert	83
2	Varianz und Kovarianz	88

VI	Grenzwertsätze	93
1	Schwaches Gesetz der großen Zahlen	93
2	Starkes Gesetz der großen Zahlen	95
3	Zentraler Grenzwertsatz	105

Abschließend: Vergleich der Konvergenzbegriffe im Starken und Schwachen Gesetz der großen Zahlen. Anwendung des folgenden Resultates mit $Y_n := S_n/n - E(X_1)$.

Satz 12. Gilt fast sicher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0$$

für eine Folge von Zufallsvariablen $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|Y_n| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Beweis. ÜBUNG. Siehe auch ÜBUNG. □

3 Zentraler Grenzwertsatz

Beispiel 1. Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$ für $p \in]0, 1[$. Bestimme ein Intervall um $E(S_n)$, das S_n mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit $\alpha \in]0, 1[$ enthält.

Es gilt

$$P(\{|S_n - E(S_n)| \leq \delta\}) = \sum_{k \in K_n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

mit

$$K_n := \{k \in \{0, \dots, n\} : |k - n \cdot p| \leq \delta\}.$$

Für jede Folge von Zahlen $\delta_n > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n / \sqrt{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|S_n - E(S_n)| \leq \delta_n\}) = 0,$$

siehe ÜBUNG, und, unter den allgemeinen Voraussetzungen von Satz 1.2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n / \sqrt{n} = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|S_n - E(S_n)| \leq \delta_n\}) = 1.$$

Dies motiviert die Untersuchung des Falls $\delta_n = c \cdot \sqrt{n}$ mit einer Konstanten $c > 0$.

Analog für einfache Irrfahrten, siehe Abbildungen VII.17–VII.21.

Im folgenden bezeichne φ die Dichte der Standard-Normalverteilung und Φ die zugehörige Verteilungsfunktion.

Satz 2 (Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace). Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$ für $p \in]0, 1[$. Setze

$$\sigma_n := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}.$$

Dann gilt für alle $u < v$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{u \cdot \sigma_n \leq S_n - E(S_n) \leq v \cdot \sigma_n\}) = \Phi(v) - \Phi(u).$$

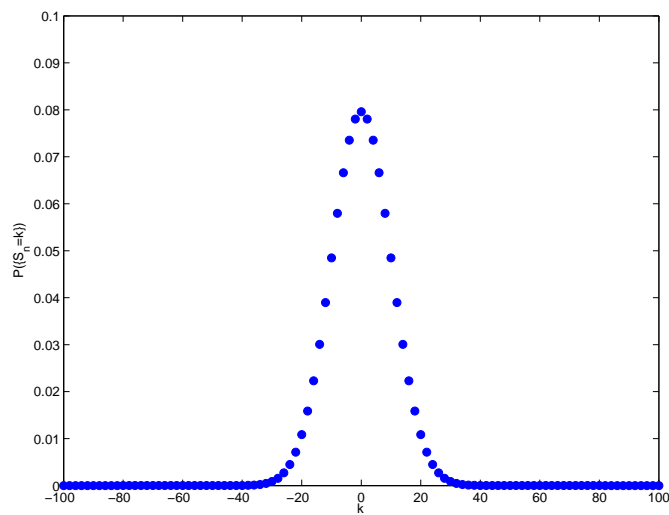


Abbildung VII.17: Symmetrische Bernoulli-Irrfahrt, Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 100$

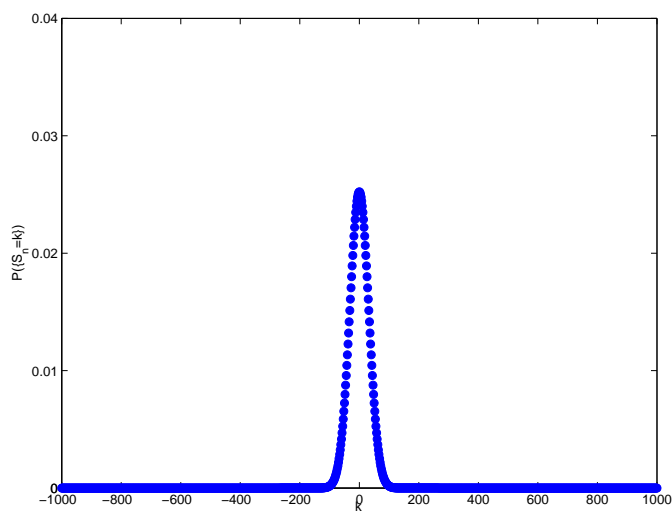


Abbildung VII.18: Symmetrische Bernoulli-Irrfahrt, Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 1000$

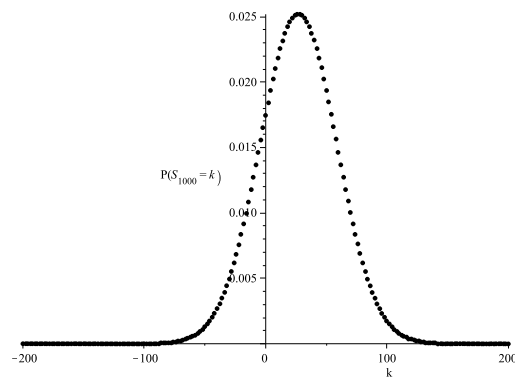


Abbildung VII.19: Einfache Irrfahrt, $p = 19/37$, Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 1000$

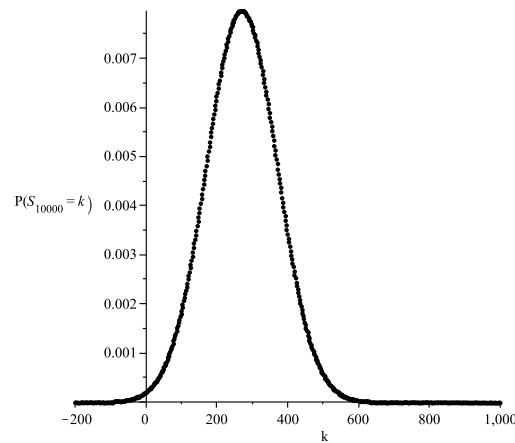


Abbildung VII.20: Einfache Irrfahrt, $p = 19/37$, Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 10\,000$

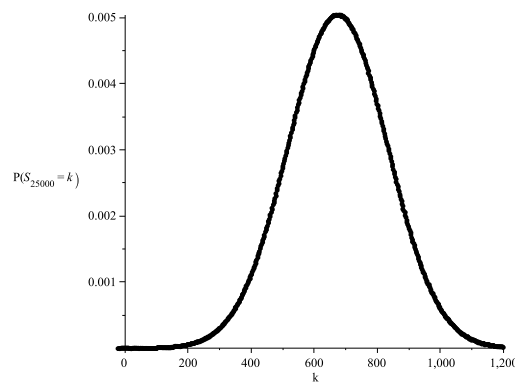


Abbildung VII.21: Einfache Irrfahrt, $p = 19/37$, Wahrscheinlichkeitsfunktion von S_n für $n = 25\,000$

Beweis. Vgl. Beweis von Satz III.5.19. Fixiere $u < v$ und setze

$$b_{n,k} := \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

und

$$x_{n,k} := \frac{k - n \cdot p}{\sigma_n}$$

für $k \in \{0, \dots, n\}$ sowie

$$K_n := \{k \in \{0, \dots, n\} : u \leq x_{n,k} \leq v\}.$$

Klar

$$P(\{u \cdot \sigma_n \leq S_n - E(S_n) \leq v \cdot \sigma_n\}) = \sum_{k \in K_n} b_{n,k}.$$

Bestimme die Asymptotik von $b_{n,k}$ gleichmäßig für $k \in K_n$. Lemma III.5.14 sichert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \in K_n} \left| \frac{\sigma_n \cdot b_{n,k}}{c_{n,k}} - 1 \right| = 0$$

mit

$$c_{n,k} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{n \cdot p}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{n \cdot (1-p)}{n-k}\right)^{n-k}.$$

Setze

$$h(y) := y \cdot \ln(y/p) + (1-y) \cdot \ln((1-y)/(1-p)), \quad y \in]0, 1[.$$

Dann

$$\sqrt{2\pi} \cdot c_{n,k} = \exp(-n \cdot h(k/n)).$$

Nun: Taylor-Entwicklung von h um p . Man verifiziert $h(p) = h'(p) = 0$ und $h''(p) = 1/(p \cdot (1-p))$, so daß

$$\max_{k \in K_n} \left| h(k/n) - \frac{x_{n,k}^2}{2 \cdot n} \right| \leq M \cdot n^{-3/2}$$

mit einer Konstanten $M > 0$ gilt. Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \in K_n} \left| \frac{c_{n,k}}{\varphi(x_{n,k})} - 1 \right| = 0.$$

Fazit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \in K_n} \left| \frac{\sigma_n \cdot b_{n,k}}{\varphi(x_{n,k})} - 1 \right| = 0. \quad (1)$$

Ferner gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K_n} \frac{1}{\sigma_n} \cdot \varphi(x_{n,k}) = \Phi(v) - \Phi(u) \quad (2)$$

aufgrund der Stetigkeit von φ .

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 3. Gleichung (1) besagt, daß reskalierte Gewichte von Binomialverteilungen lokal gleichmäßig gegen die Normalverteilungsdichte konvergieren.

Beispiel 4. Fortsetzung von Beispiel 1. Für $\delta_n := q \cdot \sigma_n$ gilt aufgrund von Satz 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|S_n - E(S_n)| \leq \delta_n\}) = \Phi(q) - \Phi(-q) = 2 \cdot \Phi(q) - 1.$$

Wähle

$$q := \Phi^{-1}((1 + \alpha)/2)$$

als $(1 + \alpha)/2$ -Quantil der Standard-Normalverteilung. Approximativ leistet dann

$$\delta_n := q \cdot \sqrt{p \cdot (1 - p)} \cdot \sqrt{n}$$

das Verlangte, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|S_n - E(S_n)| \leq \delta_n\}) = \alpha. \quad (3)$$

Beispielsweise gilt $q = 1.645 \dots$ für $\alpha = 0.9$, $q = 2.576 \dots$ für $\alpha = 0.99$ und $q = 3.291 \dots$ für $\alpha = 0.999$.

Ebenso gilt (3) für die einfache Irrfahrt $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Wahl

$$\delta_n := q \cdot 2 \sqrt{p \cdot (1 - p)} \cdot \sqrt{n}.$$

Für $n = 10^6$ Runden des einfachen Spiels beim Roulette, d.h. für $p = 19/37$, erhalten wir somit approximativ, daß

$$23\,737 \leq S_n \leq 30\,316$$

mit der Wahrscheinlichkeit 0.999 gilt.

Den Sätzen III.4.12, III.5.19, 2 sowie ÜBUNG 6:G8 liegt ein gemeinsamer Konvergenzbegriff zugrunde.

Bezeichnung. $\mathfrak{C}_Z = \{x \in \mathbb{R} : F_Z \text{ stetig in } x\}$ Menge der Stetigkeitspunkte der Verteilungsfunktion F_Z von Z .

Beispiel 5. Für $Z \sim \mathbf{U}([a, b])$ und $Z \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt $\mathfrak{C}_Z = \mathbb{R}$. Für $Z \sim \mathbf{B}(n, p)$ mit $p \in]0, 1[$ gilt $\mathfrak{C}_Z = \mathbb{R} \setminus \{0, \dots, n\}$.

Definition 6. Eine Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen *konvergiert in Verteilung* gegen eine Zufallsvariable Z , falls

$$\forall x \in \mathfrak{C}_Z : \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(x) = F_Z(x)$$

Bez.: $Z_n \xrightarrow{d} Z$

Beispiel 7. Für $Z_n = a_n$ und $Z = a$ mit $a, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$Z_n \xrightarrow{d} Z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Beachte: Aus $a_n > a$ folgt $F_{Z_n}(a) = 0$, während $F_Z(a) = 1$.

Bemerkung 8. Es existiert eine Metrik ρ auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathfrak{B}_1 , so daß

$$Z_n \xrightarrow{d} Z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(P_{Z_n}, P_Z) = 0,$$

siehe Vorlesung „Probability Theory“. In diesem Sinn beschreibt die Verteilungskonvergenz die Approximation stochastischer Modelle.

Lemma 9. Gelte $P(\{Z \in \mathbb{Z}\}) = P(\{Z_n \in \mathbb{Z}\}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$Z_n \xrightarrow{d} Z \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} : \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{Z_n = k\}) = P(\{Z = k\}).$$

Beweis. Siehe ÜBUNG 8:H33. □

Beispiel 10. Zum rein diskreten Fall:

- (i) Gelte $Z_n \sim \mathbf{B}(n, p_n)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$. Dann $Z_n \xrightarrow{d} Z$, falls $Z \sim \mathbf{P}(\lambda)$. Siehe Satz III.4.12.
- (ii) Gelte $Z_n \sim \mathbf{H}(n, n_0(n), k)$ mit $n_0(n) \in \{1, \dots, n\}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} n_0(n)/n = p \in]0, 1[$. Dann $Z_n \xrightarrow{d} Z$, falls $Z \sim \mathbf{B}(k, p)$. Siehe ÜBUNG 6:G8

Beispiel 11. Zum Übergang diskret/kontinuierlich:

- (i) Sei X_{2n} die Anzahl der Führungszeitpunkte bei einer symmetrischen Bernoulli-Irrfahrt der Länge $2n$ und sei

$$Z_{2n} = \frac{X_{2n}}{2n}.$$

Dann $Z_n \xrightarrow{d} Z$, falls Z arcussinus-verteilt. Siehe Satz III.5.19.

- (ii) Sei $S_n \sim \mathbf{B}(n, p)$ mit $p \in]0, 1[$ und

$$Z_n := \frac{S_n - n \cdot p}{\sigma_n}.$$

Dann $Z_n \xrightarrow{d} Z$, falls $Z \sim \mathbf{N}(0, 1)$. Siehe Satz 2.

Lemma 12. Sei F_Z stetig und gelte $Z_n \xrightarrow{d} Z$. Dann

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_{Z_n}(x) - F_Z(x)| = 0$,
- (ii) $\forall A \in \mathfrak{M} : \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{Z_n \in A\}) = P(\{Z \in A\})$.

Beweis. Ad (i): ÜBUNG.

Ad (ii): Gilt nach Definition für $A =]-\infty, x]$. Für $A = \{x\}$ und $\varepsilon > 0$

$$P(\{Z_n \in A\}) \leq P(\{x - \varepsilon < Z_n \leq x\}) = P(\{Z_n \leq x\}) - P(\{Z_n \leq x - \varepsilon\}).$$

Somit

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\{Z_n \in A\}) \leq F_Z(x) - F_Z(x - \varepsilon).$$

Aufgrund der Stetigkeit von F_Z in x folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{Z_n \in A\}) = 0 = P(\{Z \in A\}).$$

□

Bemerkung 13. Die Aussage von Lemma 12.(ii) gilt im allgemeinen nicht für alle $A \in \mathfrak{B}_1$, wie Beispiel 11 zeigt.

Satz 2 erweist sich als Spezialfall einer Konvergenzaussage, die unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gilt.

Satz 14 (Zentraler Grenzwertsatz). Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid und $X_1 \in \mathfrak{L}_2$ mit

$$\sigma := \sqrt{\text{Var}(X_1)} > 0.$$

Setze $\mu := E(X_1)$ sowie

$$S_n^* := \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}}.$$

Dann gilt $S_n^* \xrightarrow{d} Z$, falls $Z \sim \mathbf{N}(0, 1)$.

Beweis. Irle (2001, Kap. 12) und Vorlesung „Probability Theory“. □

Bezeichnung. Die Zufallsvariablen S_n^* heißen *standardisierte Summenvariablen*.

Bemerkung 15. Es gilt $E(S_n^*) = 0$ und $\text{Var}(S_n^*) = 1$ sowie

$$S_n^* = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{X_i - E(X_i)}{\sigma \cdot \sqrt{n}}}_{=: X_i^*}$$

mit $E(X_i^*) = 0$ und $\text{Var}(X_i^*) = 1/n$. Der zentrale Grenzwertsatz besagt also grob: „Ein Gesamteffekt, der Summe vieler kleiner zentrierter unabhängiger Einzeleffekte ist, ist näherungsweise normalverteilt.“

Die Abbildungen VII.22 und VII.23 illustrieren den Zentralen Grenzwertsatz für Summen exponentialverteilter Zufallsvariablen.

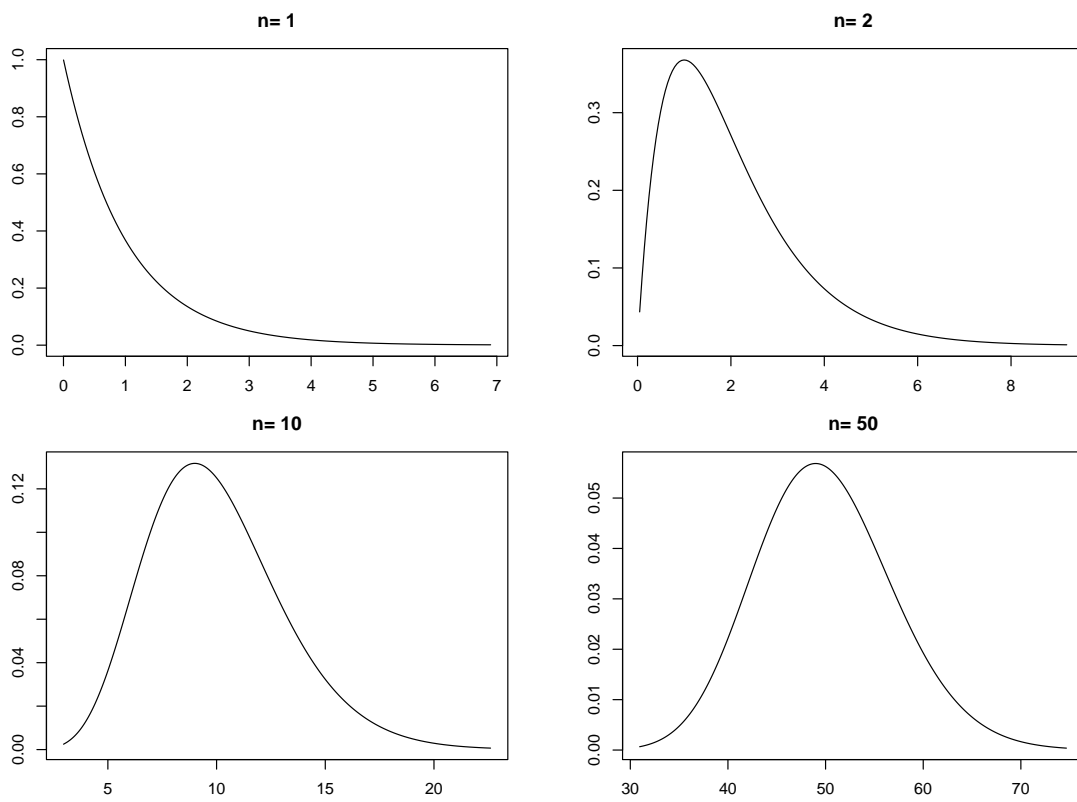


Abbildung VII.22: Dichten von Summen n unabhängiger $\mathbf{Exp}(1)$ -verteilter Zufallsvariablen

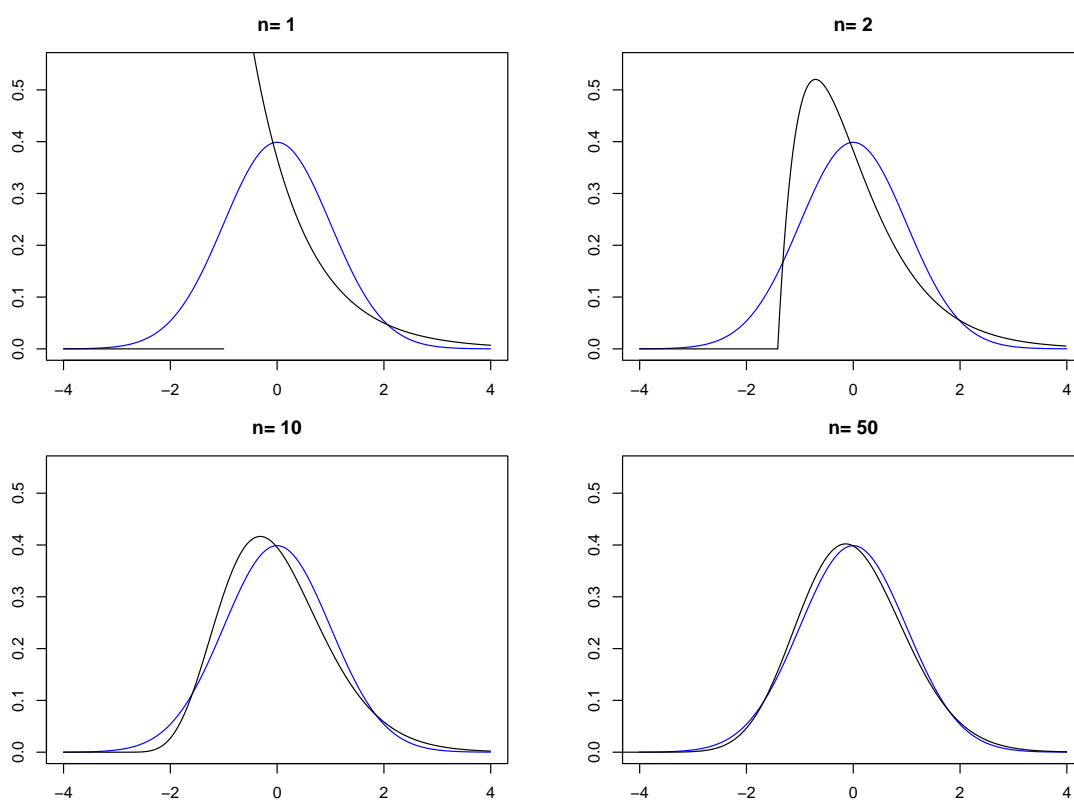


Abbildung VII.23: Dichten von standardisierten Summen n unabhängiger $\text{Exp}(1)$ -verteilter Zufallsvariablen

Beispiel 16. Überbuchung von Flugverbindungen:

- Kapazität $K \in \mathbb{N}$
- Buchungsanzahl $n \in \mathbb{N}$, wobei die Passagiere unabhängig jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p \in]0, 1[$ erscheinen

Gegeben $\alpha \in]0, 1[$. Bestimme $n \in \mathbb{N}$, so daß eine Überbuchung ungefähr mit Wahrscheinlichkeit α auftritt.

Modell: X_1, \dots, X_n iid, $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$.

Es gilt $\left\{ \sum_{i=1}^n X_i > K \right\} = \{S_n^* > c_n\}$ mit

$$S_n^* := \sum_{i=1}^n (X_i - p) / \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)},$$

$$c_n := (K - n \cdot p) / \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}.$$

Somit ist c_n näherungsweise durch $c_n = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ gegeben.

Für $K := 1000$, $p := 0.9$ und $\alpha := 0.01$ ergibt sich näherungsweise $c_n = 2.33$ und

$$n = 1086.$$

Hiermit gilt für die erwartete Anzahl nicht beförderter Passagiere

$$\mathbb{E}\left(\max\left(\sum_{i=1}^n X_i - K, 0\right)\right) \leq 86 \cdot P\left(\left\{\sum_{i=1}^n X_i > K\right\}\right) \doteq 0.86.$$

Zum Vergleich die exakten Werte

$$\mathbb{E}\left(\max\left(\sum_{i=1}^n X_i - K, 0\right)\right) = 0.0287 \dots,$$

$$P\left(\left\{\sum_{i=1}^n X_i > K\right\}\right) = 0.00811 \dots,$$

$$86 \cdot P\left(\left\{\sum_{i=1}^n X_i > K\right\}\right) = 0.697 \dots$$

Schließlich stellen wir einige Eigenschaften der Normalverteilung zusammen.

Satz 17. Für $a, b, \mu, \mu_i \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $\sigma, \sigma_i \in]0, \infty[$ gilt

- Falls $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$, dann $a \cdot X + b \sim \mathbf{N}(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2)$.
- Falls X_1, \dots, X_n unabhängig und $X_i \sim \mathbf{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, dann $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu := \sum_{i=1}^n \mu_i$ und $\sigma^2 := \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

Beweis. Ad (i): ÜBUNG.

Ad (ii): ÜBUNG. □

Bemerkung 18. Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid. Gilt $X_1 \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\sigma^2 > 0$, so folgt $S_n^* \sim \mathbf{N}(0, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, siehe Satz 17.

Definitionen und Bezeichnungen

- Additivität, 6
- Arcussinus-Verteilung, 60
- bedingte Wahrscheinlichkeit, 7
- Bernoulli-Verteilung, 33
 - symmetrisch, 44
- Binomialverteilung, 35
- Borel-messbare Abbildung, 86
- Borel-Menge, 65
- Dichte, *siehe* Wahrscheinlichkeitsdichte
- direkte Simulation, 19, 98
- Ereignis, 1
- Ereignisraum, 1
- Ergebnis, 1
- Ergebnisraum, 1
- Erwartungswert, 83
- Exponentialverteilung, 75
- geometrische Verteilung, 41
- Gleichverteilung
 - diskret, 4
 - kontinuierlich, 19, 75
- hypergeometrische Verteilung, 38
- Indikatorfunktion, 11
- Inversionsmethode, 25
- Irrfahrt
 - einfach, 93
 - symmetrisch Bernoulli-, 44
- Konvergenz
 - in Verteilung, 109
- Korrelationskoeffizient, 89
- Kovarianz, 89
- Laplace-Annahme, 4
- Lebesgue-Maß, 67
- Limes superior, 95
- Mächtigkeit, 2
- Median, 24
- Monotonie, 6
- Normalverteilung
 - eindimensional, 77
- paarweise disjunkte Mengen, 4
- Poisson-Verteilung, 38
- Potenzmenge, 2
- Produktmaß, 32
- Produktraum, 32
- Quantil, 24
- Randverteilung, 69
- σ -Additivität, 4
- σ -Algebra, 3
 - Borelsch, 65
 - erzeugt, 65
- σ -Stetigkeit von oben, 6
- σ -Stetigkeit von unten, 6
- σ -Subadditivität, 6
- Standard-Normalverteilung
 - eindimensional, 77
 - mehrdimensional, 81
- Standardabweichung, 88
- standardisierte Summenvariable, 111
- Tensorprodukt, 80
- Unabhängigkeit

- einer Folge von Ereignissen, 10
 - einer Folge von Zufallsvariablen, 15
 - paarweise, 11
 - zweier Ereignisse, 10
- Varianz, 88
- Verteilung, 69
- absolutstetig, 75
 - diskret, 33
 - gemeinsam, 69
- Verteilungsfunktion, 13
- empirisch, 19
- Wahrscheinlichkeitsdichte, 74
- Wahrscheinlichkeitsfunktion, 27
- Wahrscheinlichkeitsmaß, 4
- Wahrscheinlichkeitsraum, 4
- diskret, 27
- Wahrscheinlichkeitsverteilung, 4
- Zufallsvariable, 12
- absolutstetig verteilt, 75
 - arcussinus-verteilt, 60
 - Bernoulli-verteilt, 33
 - binomialverteilt, 35
 - diskret, 33
 - exponentialverteilt, 75
 - geometrisch verteilt, 41
 - gleichverteilt, 19, 75
 - hypergeometrisch verteilt, 38
 - integrierbar, 83
 - normalverteilt, 77
 - Poisson-verteilt, 38
 - quadratisch integrierbar, 88
 - Realisierung, 18
 - standard-normalverteilt, 77
 - symmetrisch Bernoulli-verteilt, 44
- Zufallsvariablen
- identisch verteilt, 13, 15
 - iid, 16
 - Realisierung, 18
 - unkorreliert, 89
- Zufallsvektor, 68
- absolutstetig verteilt, 75
 - gleichverteilt, 75
 - standard-normalverteilt, 81
- Zufallsvektoren
- identisch verteilt, 69
- Zufallszahlen, 20