Inhaltsverzeichnis

Kapitel VII

Grenzwertsätze

In diesem Kapitel sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Wir studieren das Verhalten der Partialsummen

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

für große Werte n. Untersucht wird dazu die Konvergenz geeignet normierter Partialsummenfolgen. Als Standard-Annahme sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid und $X_1 \in \mathfrak{L}_2$ mit $\mathrm{Var}(X_1) > 0$. Schwächere Annahmen werden ggf. explizit genannt.

Beispiel 1. Das einfachste Beispiel ist durch $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$ für $p \in]0,1[$ gegeben. Die Transformation $\widetilde{X}_i = 2 \cdot X_i - 1$ liefert wiederum eine iid-Folge und führt auf die *einfache Irrfahrt*

$$\widetilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i = 2 \cdot S_n - n$$

mit Parameter p. Hierdurch Modellierung der akkumulierten Gewinne bei einfachem Spiel, speziell $p = 19/37 = 0.5135\ldots$: Roulette aus Sicht des Kasinos. In Abschnitt III.5 wurde der Fall $p = 1/2$ analysiert.

1 Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Wir studieren zunächst die Konvergenz des arithmetischen Mittels S_n/n gegen $\mathrm{E}(X_1)$.

Bemerkung 1. Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 1/2)$. Dann

$$P(\{S_{2n}/(2n) = \mathrm{E}(X_1)\}) = 2^{-2n} \cdot \binom{2n}{2} \approx 1/\sqrt{\pi\, n},$$

vgl. Korollar III.5.15, so daß insbesondere $\lim_{n\to\infty} P(\{S_{2n}/(2n) = \mathrm{E}(X_1)\}) = 0$. Man untersucht deshalb das asymptotische Verhalten von $P(\{|S_n/n - \mathrm{E}(X_1)| \geq \varepsilon\})$ im Fall $\varepsilon > 0$.

Satz 2 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen[1])**.** Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise unkorreliert und identisch verteilt. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|S_n/n - \mathrm{E}(X_1)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Beweis. Es gilt $X_i \in \mathfrak{L}_2$ sowie $\mathrm{E}(S_n/n) = \mathrm{E}(X_1)$ und gemäß Satz VI.2.13

$$\mathrm{Var}(S_n) = n \cdot \mathrm{Var}(X_1).$$

Also sichert Satz VI.2.8

$$P(\{|S_n/n - \mathrm{E}(X_1)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathrm{Var}(S_n/n) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n}. \tag{1}$$

□

Bemerkung 3. Was besagt Satz 2 für das Verhalten von S_n? Es gilt

$$\{|S_n/n - \mathrm{E}(X_1)| < \varepsilon\} = \{(\mathrm{E}(X_1) - \varepsilon) \cdot n \leq S_n \leq (\mathrm{E}(X_1) + \varepsilon) \cdot n\}.$$

Also folgt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{(\mathrm{E}(X_1) - \varepsilon) \cdot n \leq S_n \leq (\mathrm{E}(X_1) + \varepsilon) \cdot n\}) = 1.$$

Beispiel 4. Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$. Gemäß (1) gilt

$$P(\{|S_n/n - p| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2 \cdot n} \leq \frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n}. \tag{2}$$

Für großes n kennt man wesentlich bessere Abschätzungen, da die Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt ist.

Satz 5 (Hoeffdingsche Ungleichung)**.** Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $0 \leq X_i \leq 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$P(\{|S_n/n - \mathrm{E}(X_1)| \geq \varepsilon\}) \leq 2 \cdot \exp(-2 \cdot \varepsilon^2 \cdot n).$$

Beweis. Siehe Müller-Gronbach, Novak, Ritter (2008, Kap. 3.4). □

Beispiel 6. Vergleich der Hoeffding-Ungleichung mit (2). Für $\varepsilon = 10^{-2}$ und $n = 10^4$ gilt

$$\frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n} = 0.25 \quad \text{und} \quad 2 \cdot \exp(-2 \cdot \varepsilon^2 \cdot n) = 0.270\ldots,$$

und für $\varepsilon = 10^{-2}$ und $n = 10^5$ gilt

$$\frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n} = 0.025 \quad \text{und} \quad 2 \cdot \exp(-2 \cdot \varepsilon^2 \cdot n) = 4.12 \cdots 10^{-9}.$$

[1] Jakob Bernoulli (1713), Khintchine (1928)

2 Starkes Gesetz der großen Zahlen

Satz 1.2 macht (unmittelbar) keine Aussage über einzelne Realisierungen der Folge $(S_n/n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir betrachten deshalb nun einen stärkeren Konvergenzbegriff.

Definition 1. Für $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ heißt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

der *Limes superior* der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung 2. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n\},$$

siehe Übung 1:H4.

Lemma 3 (Borel-Cantelli-Lemma)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Beweis. Setze $B_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Satz I.1.17 und die Voraussetzung implizieren

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = 0$$

□

Bezeichnung. Eine Eigenschaft gilt für *fast alle* ω bzw. *fast sicher*, falls sie für alle ω aus einer Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $P(A) = 1$ gilt.

Satz 4 (Starkes Gesetz der großen Zahlen[2])**.** Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \in \mathfrak{L}_1$. Dann gilt fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} S_n/n = \mathrm{E}(X_1).$$

Beweis. Siehe Irle (2001, Kap. 11) und Vorlesung „Probability Theory".
Hier unter der zusätzlichen Annahme, daß $X_1 \in \mathfrak{L}_2$. Es genügt den Fall $\mathrm{E}(X_1) = 0$ zu betrachten. Wir zeigen zunächst die Konvergenz der Teilfolge $(S_{n^2}/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Setze

$$A_{n,\varepsilon} := \{|S_{n^2}/n^2| > \varepsilon\}, \qquad B_\varepsilon := \{\limsup_{n\to\infty} |S_{n^2}/n^2| > \varepsilon\}$$

[2] Borel (1909), Kolmogorov (1930), Etemadi (1981)

für $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Dann

$$B_\varepsilon \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon},$$

und mit (1.1) folgt

$$P(A_{n,\varepsilon}) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Lemma 3 sichert $P(B_\varepsilon) = 0$ und mit Satz I.1.17.(ii) ergibt sich

$$P(\{\limsup_{n\to\infty} |S_{n^2}/n^2| > 0\}) = \lim_{\ell\to\infty} P(B_{1/\ell}) = 0,$$

d.h. fast sicher gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_{n^2}/n^2 = 0. \tag{1}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $k_n \in \mathbb{N}$ durch $k_n^2 \leq n < (k_n + 1)^2$. Wie oben zeigt man

$$P(\{|S_n - S_{k_n^2}| > \varepsilon \cdot k_n^2\}) \leq \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{\varepsilon^2} \cdot \frac{n - k_n^2}{k_n^4} \leq \frac{c}{k_n^3}$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Wie oben folgt, daß

$$\lim_{n\to\infty} (S_n/k_n^2 - S_{k_n^2}/k_n^2) = 0$$

fast sicher gilt, und zusammen mit (1) ergibt sich hieraus, daß

$$\lim_{n\to\infty} S_n/k_n^2 = 0$$

fast sicher gilt. Schließlich verwende man $\lim_{n\to\infty} n/k_n^2 = 1$. □

Die Abbildungen VII.1–VII.3 zeigen je eine Realisierung der Folge $(S_1, \ldots, S_n/n)$ von arithmetischen Mitteln im Fall $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.7)$.

Bemerkung 5. Was besagt Satz 4 für Folgen von Realisierungen der Zufallsvariablen S_n? Für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon,\omega)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon,\omega): \ (\mathrm{E}(X_1) - \varepsilon) \cdot n \leq S_n(\omega) \leq (\mathrm{E}(X_1) + \varepsilon) \cdot n.$$

Korollar 6. Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid und $B \in \mathfrak{B}_1$. Dann gilt fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1_B(X_i) = P(\{X_1 \in B\}).$$

Beweis. Für $Z_i := 1_B(X_i)$ gilt $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $Z_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$, siehe ÜBUNG 3:H11. Beachte, daß $\mathrm{E}(Z_1) = P(\{X_1 \in B\})$, und wende Satz 4 an. □

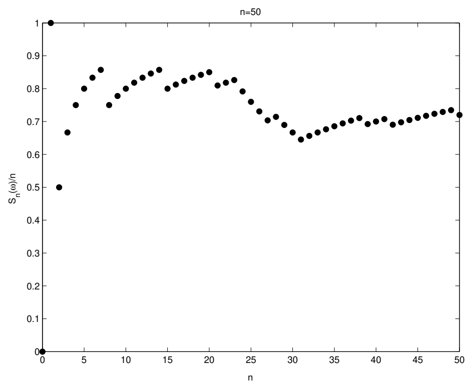

Abbildung VII.1: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 50$, $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.7)$

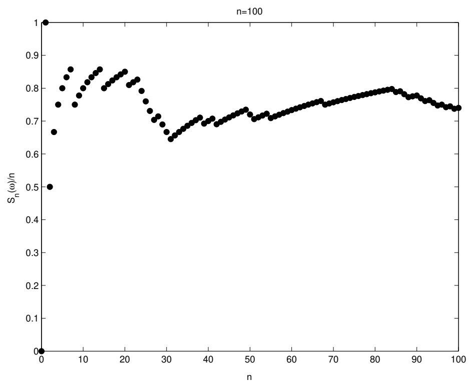

Abbildung VII.2: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 100$, $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.7)$

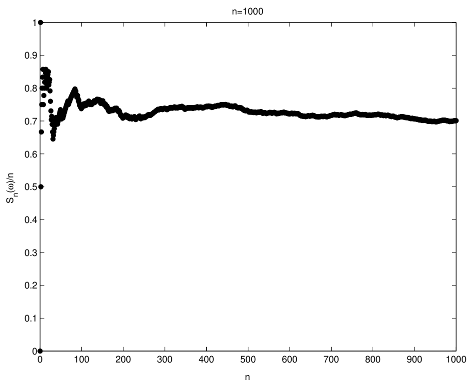

Abbildung VII.3: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 1000$, $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.7)$

Bemerkung 7. Korollar 6 liefert eine theoretische Rechtfertigung der Methode der direkten Simulation, siehe Abschitt II.1. Siehe auch Seite 4 zur frequentistischen Interpretation von Wahrscheinlichkeiten.

Wie Satz 4 zeigt, kann die direkte Simulation ebenso für die approximative Berechnung von Erwartungswerten eingesetzt werden. Gegeben sei eine Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Betrachte eine iid Folge von Zufallsvariablen $X_1', \dots, X_n'$ auf $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$, wobei X und X_1' identisch verteilt sind.

1. „Erzeuge“ eine Realisierung $(x_1', \dots, x_n')$ von $(X_1', \dots, X_n')$.
2. Approximiere $\mathrm{E}(X)$ durch die das arithmetische Mittel
$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i'.$$

Beispiel 8. Zur Interpretation der Halbwertszeit: Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$. Die zugehörige Halbwertszeit ist der Median $h = \ln(2)/\lambda$, siehe Beispiel V.2.10. Gemäß Korollar 6 gilt fast sicher
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1_{]-\infty, h]}(X_i) = P(\{X_1 \le h\}) = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 9. Betrachte die Zufallsvariable[3]
$$X := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=1}^{k} Y_i \le 1\},$$
wobei $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $Y_1 \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ für $\lambda := 5$. Berechne $\mathrm{E}(X)$. Vgl. $\boxed{\text{ÜBUNG}}$. Anwendung: Warteschlangentheorie, Stichwort Poisson-Prozeß. Siehe Abbildungen VII.4–VII.7 zur Approximation von $\mathrm{E}(X)$; die ersten 10 Simulationen lieferten die Werte 7, 1, 4, 6, 7, 6, 8, 5, 11, 5.

Im folgenden sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid, und $F := F_{X_1}$ bezeichne die Verteilungsfunktion von X_1. Wir betrachten empirische Verteilungsfunktionen
$$\widehat{F}_n(x; \omega) := F_n(x; X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)), \qquad x \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega,$$
auf der Basis von Realisierungen von $(X_1, \dots, X_n)$ und untersuchen die Konvergenz von $\widehat{F}_n$ gegen F.

Bemerkung 10. Korollar 6 zeigt für alle $x \in \mathbb{R}$, daß für fast alle ω gilt
$$\lim_{n \to \infty} \widehat{F}_n(x; \omega) = F(x).$$

Verschärfung im folgenden Satz von Glivenko-Cantelli (Hauptsatz der Mathematischen Statistik): fast sicher gleichmäßige Konvergenz.

[3]Konvention: $\max M = \infty$ für unbeschränkte Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$.

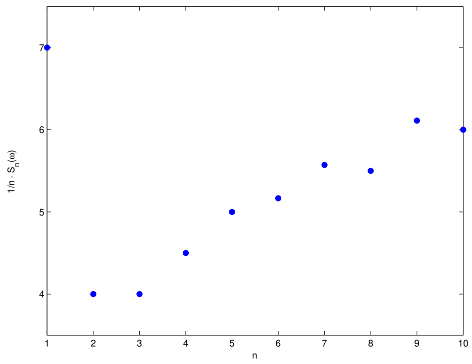

Abbildung VII.4: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 10$

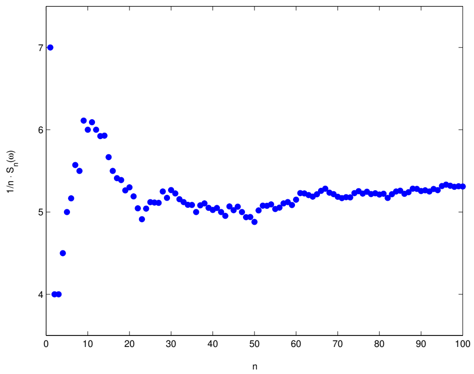

Abbildung VII.5: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 100$

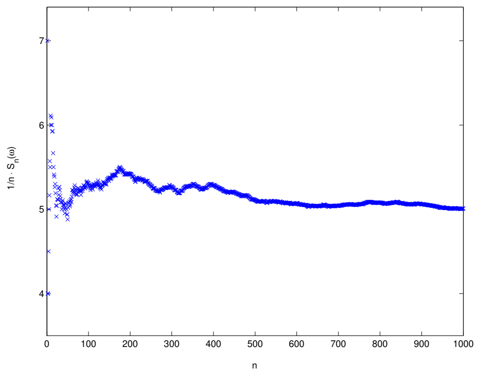

Abbildung VII.6: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 1000$

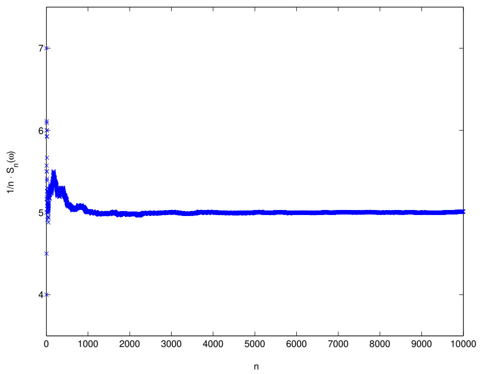

Abbildung VII.7: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 10000$

Satz 11 (Satz von Glivenko-Cantelli)**.** Für fast alle ω gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x;\omega) - F(x)| = 0.$$

Beweis. Man betrachte vorab den Spezialfall einer stetigen und streng monoton wachsenden Verteilungsfunktion F.

Zur Behandlung des allgemeinen Falls schreiben wir

$$G^-(x) := \lim_{y\to x-} G(y)$$

für Funktionen $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit existierenden linksseitigen Grenzwerten, und wir setzen

$$\mathfrak{E} := \{A \in \mathfrak{A} : P(A) = 1\}.$$

Fixiere $k \in \mathbb{N}$. Betrachte für $\ell = 1, \ldots, k-1$ die ℓ/k-Quantile $q_{\ell,k}$ von F, setze ferner $q_{0,k} := -\infty$ und $q_{k,k} := \infty$. Korollar 6 zeigt

$$\forall \ell \in \{1,\ldots,k-1\}\ \exists A \in \mathfrak{E}\ \forall \omega \in A : \quad \lim_{n\to\infty} \widehat{F}_n^-(q_{\ell,k};\omega) = F^-(q_{\ell,k})$$

und

$$\forall \ell \in \{1,\ldots,k-1\}\ \exists A \in \mathfrak{E}\ \forall \omega \in A : \quad \lim_{n\to\infty} \widehat{F}_n(q_{\ell,k};\omega) = F(q_{\ell,k}).$$

Für

$$\Delta_{n,k}(\omega) = \max_{\ell\in\{0,\ldots,k\}} \max\Big(\big|\widehat{F}_n(q_{\ell,k};\omega) - F(q_{\ell,k})\big|, \big|\widehat{F}_n^-(q_{\ell,k};\omega) - F^-(q_{\ell,k})\big|\Big)$$

folgt

$$\exists A_k \in \mathfrak{E}\ \forall \omega \in A_k : \lim_{n\to\infty} \Delta_{n,k}(\omega) = 0. \tag{2}$$

Lemma II.3.3 zeigt

$$F^-(q_{\ell,k}) - F(q_{\ell-1,k}) \leq \ell/k - (\ell-1)/k = 1/k.$$

Hiermit folgt für $x \in]q_{\ell-1,k}, q_{\ell,k}[$ und $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned}\widehat{F}_n(x;\omega) &\leq \widehat{F}_n^-(q_{\ell,k};\omega) \leq F^-(q_{\ell,k}) + \Delta_{n,k}(\omega) \leq F(q_{\ell-1,k}) + 1/k + \Delta_{n,k}(\omega)\\ &\leq F(x) + 1/k + \Delta_{n,k}(\omega)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\widehat{F}_n(x;\omega) &\geq \widehat{F}_n(q_{\ell-1,k};\omega) \geq F(q_{\ell-1,k}) - \Delta_{n,k}(\omega) \geq F^-(q_{\ell,k}) - 1/k - \Delta_{n,k}(\omega)\\ &\geq F(x) - 1/k - \Delta_{n,k}(\omega).\end{aligned}$$

Für $\omega \in A_k$ ergibt sich gemäß (2)

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x;\omega) - F(x)| \leq 1/k.$$

Fazit: für

$$A := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}$$

gilt

$$P(A) = 1$$

und

$$\forall \omega \in A: \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x;\omega) - F(x)| = 0.$$

□

Die Abbildungen VII.8–VII.16 illustrieren den Satz von Glivenko-Cantelli, wobei jeweils schwarz eine empirische Verteilungsfunktion und blau die Verteilungsfunktion dargestellt sind. Verwendet werden $n = 50$, 250, 1000 Simulationen. Die zugrundeliegende Verteilungen sind gegeben durch

$$P(\{X_1 = 1\}) = 0.3, \quad P(\{X_1 = 2\}) = 0.2, \quad P(\{X_1 = 3\}) = 0.5$$

in den Abbildungen VII.8–VII.10,

$$X_1 \sim \mathbf{U}([0,1])$$

in den Abbildungen VII.11–VII.13 und

$$X_1 \sim \mathbf{Exp}(1/2)$$

in den Abbildungen VII.14–VII.16.

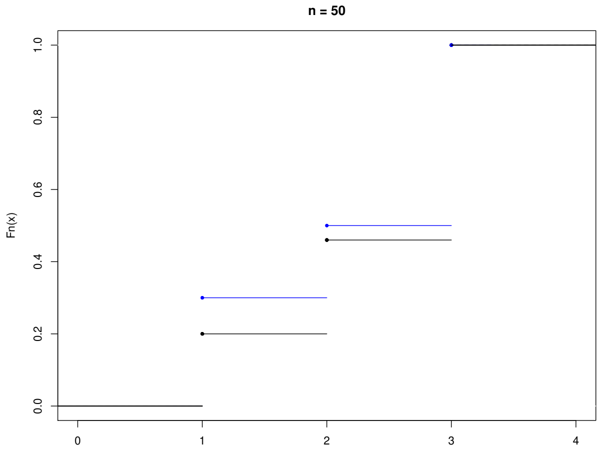

Abbildung VII.8: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 50$

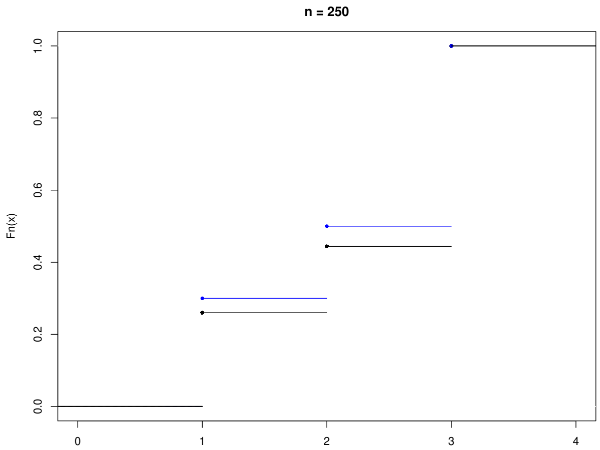

Abbildung VII.9: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 250$

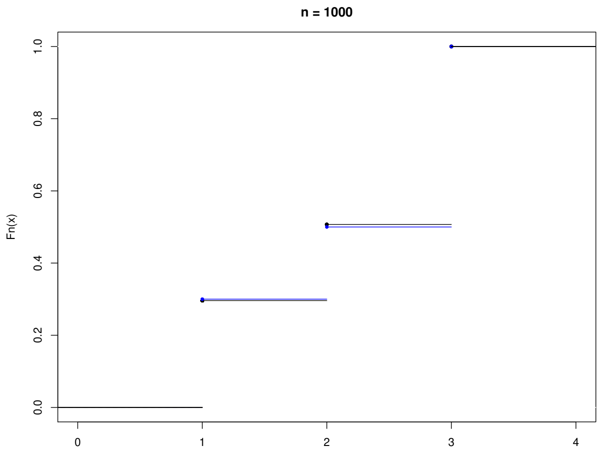

Abbildung VII.10: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 1000$

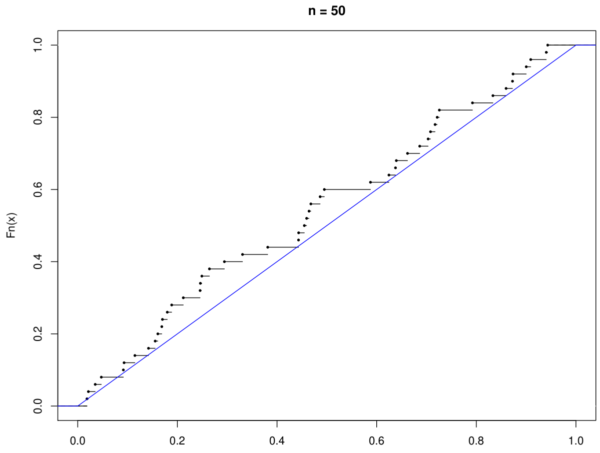

Abbildung VII.11: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 50$

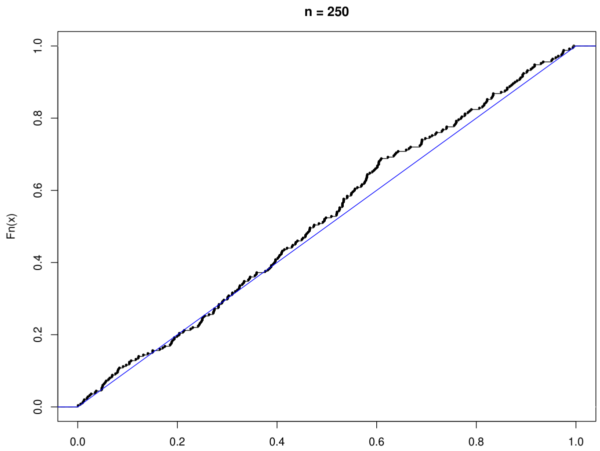

Abbildung VII.12: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 250$

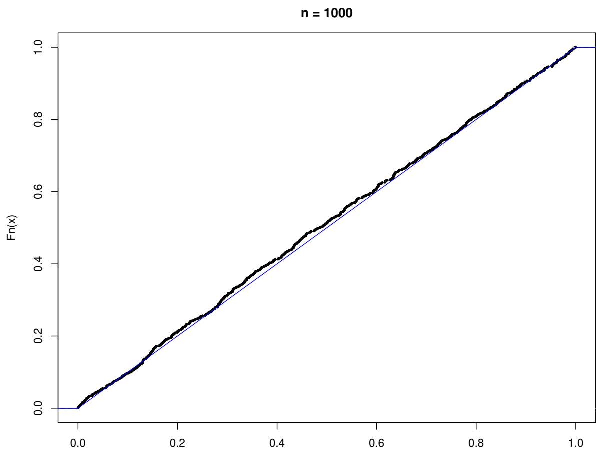

Abbildung VII.13: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 1000$

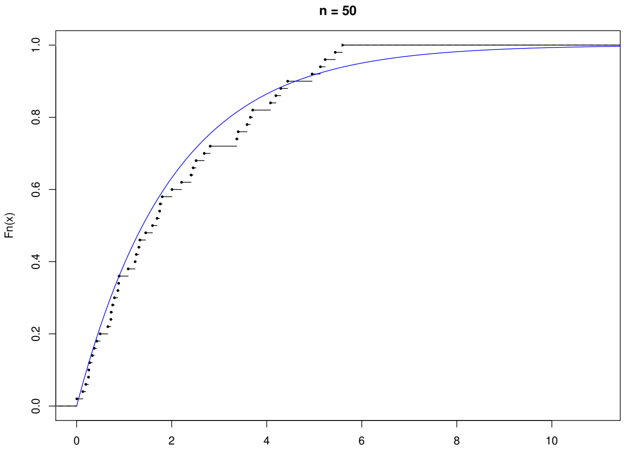

Abbildung VII.14: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 50$

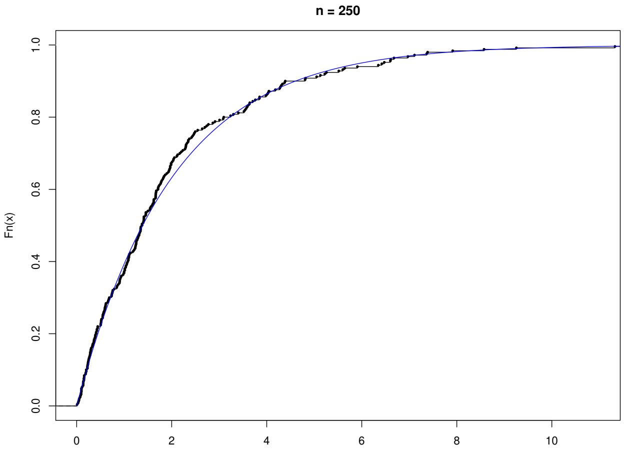

Abbildung VII.15: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 250$

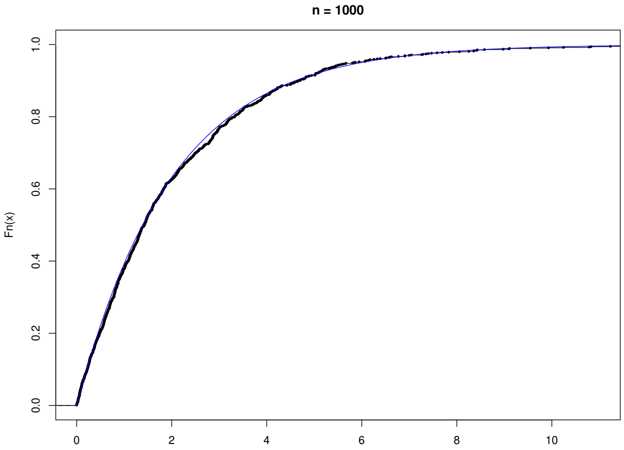

Abbildung VII.16: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 1000$

Abschließend: Vergleich der Konvergenzbegriffe im Starken und Schwachen Gesetz der großen Zahlen. Anwendung des folgenden Resultates mit $Y_n := S_n/n - \mathrm{E}(X_1)$.

Satz 12. Gilt fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = 0$$

für eine Folge von Zufallsvariablen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|Y_n| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Beweis. $\boxed{\text{Übung}}$. Siehe auch $\boxed{\text{Übung}}$. □

Definitionen und Bezeichnungen