

Inhaltsverzeichnis

I	Grundbegriffe	1
1	Wahrscheinlichkeitsräume	1
2	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit	7
3	Reellwertige Zufallsvariablen	11
II	Stochastische Simulation	17
1	Die Methode der direkten Simulation	17
2	Zufallszahlen	19
3	Die Inversionsmethode	24
III	Diskrete Modelle	27
1	Wahrscheinlichkeitsfunktionen	27
2	Elementare Kombinatorik	28
3	Produkt Räume	31
4	Diskrete Zufallsvariablen	33
5	Die symmetrische Bernoulli-Irrfahrt	44
IV	Grundlagen allgemeiner Modelle	63
1	Die Borelsche σ -Algebra in \mathbb{R}^d	63
2	Das d -dimensionale Lebesgue-Maß	66
3	Verteilungen	68
V	Absolutstetige Modelle	73
1	Wahrscheinlichkeitsdichten	73
2	Absolutstetig verteilte Zufallsvariablen	74
VI	Erwartungswert und Varianz	83
1	Der Erwartungswert	83
2	Varianz und Kovarianz	88

VI Grenzwertsätze	93
1 Schwaches Gesetz der großen Zahlen	93
2 Starkes Gesetz der großen Zahlen	95

Kapitel VII

Grenzwertsätze

In diesem Kapitel sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Wir studieren das Verhalten der Partialsummen

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$$

für große Werte n . Untersucht wird dazu die Konvergenz geeignet normierter Partialsummenfolgen. Als Standard-Annahme sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid und $X_1 \in \mathfrak{L}_2$ mit $\text{Var}(X_1) > 0$. Schwächere Annahmen werden ggf. explizit genannt.

Beispiel 1. Das einfachste Beispiel ist durch $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$ für $p \in]0, 1[$ gegeben. Die Transformation $\tilde{X}_i = 2 \cdot X_i - 1$ liefert wiederum eine iid-Folge und führt auf die *einfache Irrfahrt*

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i = 2 \cdot S_n - n$$

mit Parameter p . Hierdurch Modellierung der akkumulierten Gewinne bei einfachem Spiel, speziell $p = 19/37 = 0.5135\dots$: Roulette aus Sicht des Kasinos. In Abschnitt III.5 wurde der Fall $p = 1/2$ analysiert.

1 Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Wir studieren zunächst die Konvergenz des arithmetischen Mittels S_n/n gegen $E(X_1)$.

Bemerkung 1. Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 1/2)$. Dann

$$P(\{S_{2n}/(2n) = E(X_1)\}) = 2^{-2n} \cdot \binom{2n}{2} \approx 1/\sqrt{\pi n},$$

vgl. Korollar III.5.15, so daß insbesondere $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{S_{2n}/(2n) = E(X_1)\}) = 0$. Man untersucht deshalb das asymptotische Verhalten von $P(\{|S_n/n - E(X_1)| \geq \varepsilon\})$ im Fall $\varepsilon > 0$.

Satz 2 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen¹). Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise unkorreliert und identisch verteilt. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|S_n/n - E(X_1)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Beweis. Es gilt $X_i \in \mathfrak{L}_2$ sowie $E(S_n/n) = E(X_1)$ und gemäß Satz VI.2.13

$$\text{Var}(S_n) = n \cdot \text{Var}(X_1).$$

Also sichert Satz VI.2.8

$$P(\{|S_n/n - E(X_1)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \text{Var}(S_n/n) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\text{Var}(X_1)}{n}. \quad (1)$$

□

Bemerkung 3. Was besagt Satz 2 für das Verhalten von S_n ? Es gilt

$$\{|S_n/n - E(X_1)| < \varepsilon\} = \{(E(X_1) - \varepsilon) \cdot n \leq S_n \leq (E(X_1) + \varepsilon) \cdot n\}.$$

Also folgt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{(E(X_1) - \varepsilon) \cdot n \leq S_n \leq (E(X_1) + \varepsilon) \cdot n\}) = 1.$$

Beispiel 4. Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$. Gemäß (1) gilt

$$P(\{|S_n/n - p| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2 \cdot n} \leq \frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n}. \quad (2)$$

Für großes n kennt man wesentlich bessere Abschätzungen, da die Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt ist.

Satz 5 (Hoeffdingsche Ungleichung). Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $0 \leq X_i \leq 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$P(\{|S_n/n - E(X_1)| \geq \varepsilon\}) \leq 2 \cdot \exp(-2 \cdot \varepsilon^2 \cdot n).$$

Beweis. Siehe Müller-Gronbach, Novak, Ritter (2008, Kap. 3.4). □

Beispiel 6. Vergleich der Hoeffding-Ungleichung mit (2). Für $\varepsilon = 10^{-2}$ und $n = 10^4$ gilt

$$\frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n} = 0.25 \quad \text{und} \quad 2 \cdot \exp(-2 \cdot \varepsilon^2 \cdot n) = 0.270 \dots,$$

und für $\varepsilon = 10^{-2}$ und $n = 10^5$ gilt

$$\frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot n} = 0.025 \quad \text{und} \quad 2 \cdot \exp(-2 \cdot \varepsilon^2 \cdot n) = 4.12 \dots \cdot 10^{-9}.$$

¹Jakob Bernoulli (1713), Khintchine (1928)

2 Starkes Gesetz der großen Zahlen

Satz 1.2 macht (unmittelbar) keine Aussage über einzelne Realisierungen der Folge $(S_n/n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir betrachten deshalb nun einen stärkeren Konvergenzbegriff.

Definition 1. Für $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ heißt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

der *Limes superior* der Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung 2. Es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n\},$$

siehe ÜBUNG 1:H4.

Lemma 3 (Borel-Cantelli-Lemma).

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0.$$

Beweis. Setze $B_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Satz I.1.17 und die Voraussetzung implizieren

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) = 0$$

□

Bezeichnung. Eine Eigenschaft gilt für *fast alle* ω bzw. *fast sicher*, falls sie für alle ω aus einer Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $P(A) = 1$ gilt.

Satz 4 (Starkes Gesetz der großen Zahlen²). Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \in \mathfrak{L}_1$. Dann gilt fast sicher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/n = E(X_1).$$

Beweis. Siehe Irlé ([2001](#), Kap. 11) und Vorlesung „Probability Theory“.

Hier unter der zusätzlichen Annahme, daß $X_1 \in \mathfrak{L}_2$. Es genügt den Fall $E(X_1) = 0$ zu betrachten. Wir zeigen zunächst die Konvergenz der Teilfolge $(S_{n^2}/n^2)_{n \in \mathbb{N}}$. Setze

$$A_{n,\varepsilon} := \{|S_{n^2}/n^2| > \varepsilon\}, \quad B_\varepsilon := \{\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_{n^2}/n^2| > \varepsilon\}$$

²Borel (1909), Kolmogorov (1930), Etemadi (1981)

für $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Dann

$$B_\varepsilon \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_{n,\varepsilon},$$

und mit (1.1) folgt

$$P(A_{n,\varepsilon}) \leq \frac{\text{Var}(X_1)}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Lemma 3 sichert $P(B_\varepsilon) = 0$ und mit Satz I.1.17.(ii) ergibt sich

$$P(\{\limsup_{n \rightarrow \infty} |S_{n^2}/n^2| > 0\}) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} P(B_{1/\ell}) = 0,$$

d.h. fast sicher gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n^2}/n^2 = 0. \quad (1)$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $k_n \in \mathbb{N}$ durch $k_n^2 \leq n < (k_n + 1)^2$. Wie oben zeigt man

$$P(\{|S_n - S_{k_n^2}| > \varepsilon \cdot k_n^2\}) \leq \frac{\text{Var}(X_1)}{\varepsilon^2} \cdot \frac{n - k_n^2}{k_n^4} \leq \frac{c}{k_n^3}$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Wie oben folgt, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n/k_n^2 - S_{k_n^2}/k_n^2) = 0$$

fast sicher gilt, und zusammen mit (1) ergibt sich hieraus, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n/k_n^2 = 0$$

fast sicher gilt. Schließlich verwende man $\lim_{n \rightarrow \infty} n/k_n^2 = 1$. \square

Die Abbildungen VII.1–VII.3 zeigen je eine Realisierung der Folge $(S_1, \dots, S_n/n)$ von arithmetischen Mitteln im Fall $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.7)$.

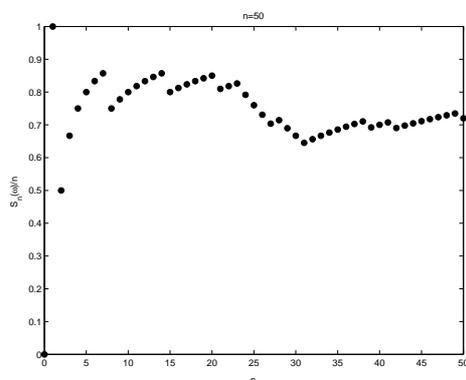
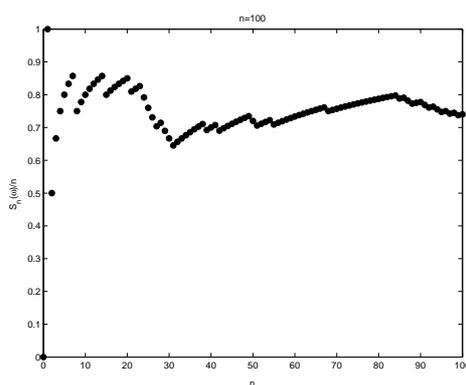
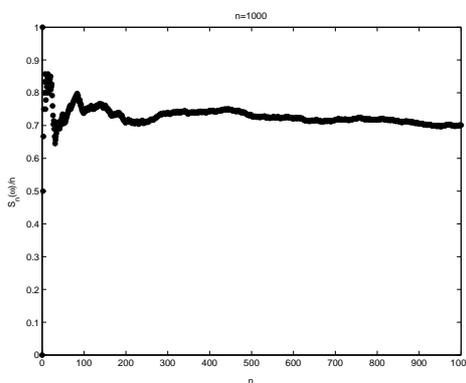
Bemerkung 5. Was besagt Satz 4 für Folgen von Realisierungen der Zufallsvariablen S_n ? Für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon, \omega) \forall n \geq n_0(\varepsilon, \omega) : (E(X_1) - \varepsilon) \cdot n \leq S_n(\omega) \leq (E(X_1) + \varepsilon) \cdot n.$$

Korollar 6. Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid und $B \in \mathfrak{B}_1$. Dann gilt fast sicher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 1_B(X_i) = P(\{X_1 \in B\}).$$

Beweis. Für $Z_i := 1_B(X_i)$ gilt $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $Z_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$, siehe ÜBUNG 3:H11. Beachte, daß $E(Z_1) = P(\{X_1 \in B\})$, und wende Satz 4 an. \square

Abbildung VII.1: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 50$, $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.7)$ Abbildung VII.2: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 100$, $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.7)$ Abbildung VII.3: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 1000$, $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.7)$

Bemerkung 7. Korollar 6 liefert eine theoretische Rechtfertigung der Methode der direkten Simulation, siehe Abschnitt II.1. Siehe auch Seite 4 zur frequentistischen Interpretation von Wahrscheinlichkeiten.

Wie Satz 4 zeigt, kann die direkte Simulation ebenso für die approximative Berechnung von Erwartungswerten eingesetzt werden. Gegeben sei eine Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Betrachte eine iid Folge von Zufallsvariablen X'_1, \dots, X'_n auf $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$, wobei X und X'_1 identisch verteilt sind.

1. „Erzeuge“ eine Realisierung (x'_1, \dots, x'_n) von (X'_1, \dots, X'_n) .
2. Approximiere $E(X)$ durch die das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x'_i.$$

Beispiel 8. Zur Interpretation der Halbwertszeit: Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$. Die zugehörige Halbwertszeit ist der Median $h = \ln(2)/\lambda$, siehe Beispiel V.2.10. Gemäß Korollar 6 gilt fast sicher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 1_{] -\infty, h]}(X_i) = P(\{X_1 \leq h\}) = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 9. Betrachte die Zufallsvariable³

$$X := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=1}^k Y_i \leq 1\},$$

wobei $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid mit $Y_1 \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ für $\lambda := 5$. Berechne $E(X)$. Vgl. ÜBUNG. Anwendung: Warteschlangentheorie, Stichwort Poisson-Prozeß. Siehe Abbildungen VII.4–VII.7 zur Approximation von $E(X)$; die ersten 10 Simulationen lieferten die Werte 7, 1, 4, 6, 7, 6, 8, 5, 11, 5.

Im folgenden sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iid, und $F := F_{X_1}$ bezeichne die Verteilungsfunktion von X_1 . Wir betrachten empirische Verteilungsfunktionen

$$\widehat{F}_n(x; \omega) := F_n(x; X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)), \quad x \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega,$$

auf der Basis von Realisierungen von (X_1, \dots, X_n) und untersuchen die Konvergenz von \widehat{F}_n gegen F .

Bemerkung 10. Korollar 6 zeigt für alle $x \in \mathbb{R}$, daß für fast alle ω gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{F}_n(x; \omega) = F(x).$$

Verschärfung im folgenden Satz von Glivenko-Cantelli (Hauptsatz der Mathematischen Statistik): fast sicher gleichmäßige Konvergenz.

³Konvention: $\max M = \infty$ für unbeschränkte Mengen $M \subseteq \mathbb{N}$.

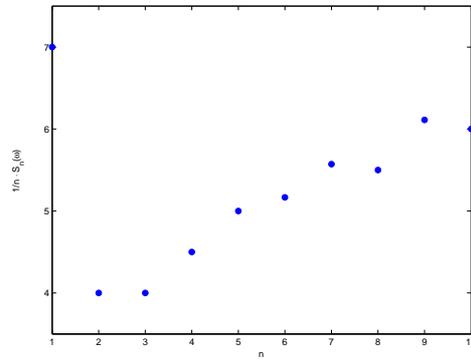


Abbildung VII.4: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 10$

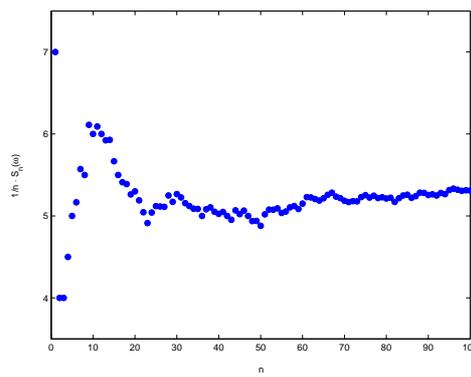


Abbildung VII.5: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 100$

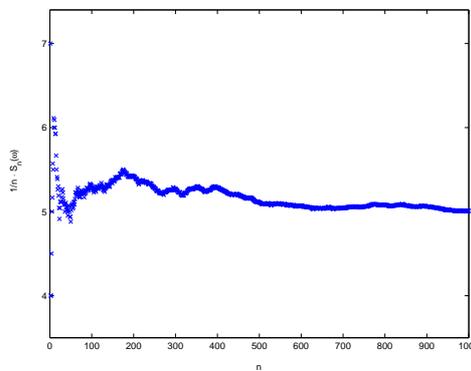
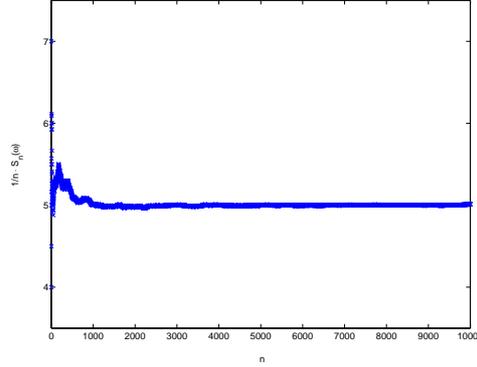


Abbildung VII.6: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 1000$

Abbildung VII.7: Realisierung arithmetischer Mittel für $n \leq 10000$

Satz 11 (Satz von Glivenko-Cantelli). Für fast alle ω gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x; \omega) - F(x)| = 0.$$

Beweis. Man betrachte vorab den Spezialfall einer stetigen und streng monoton wachsenden Verteilungsfunktion F .

Zur Behandlung des allgemeinen Falls schreiben wir

$$G^-(x) := \lim_{y \rightarrow x^-} G(y)$$

für Funktionen $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit existierenden linksseitigen Grenzwerten, und wir setzen

$$\mathfrak{E} := \{A \in \mathfrak{A} : P(A) = 1\}.$$

Fixiere $k \in \mathbb{N}$. Betrachte für $\ell = 1, \dots, k-1$ die ℓ/k -Quantile $q_{\ell,k}$ von F , setze ferner $q_{0,k} := -\infty$ und $q_{k,k} := \infty$. Korollar 6 zeigt

$$\forall \ell \in \{1, \dots, k-1\} \exists A \in \mathfrak{E} \forall \omega \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{F}_n^-(q_{\ell,k}; \omega) = F^-(q_{\ell,k})$$

und

$$\forall \ell \in \{1, \dots, k-1\} \exists A \in \mathfrak{E} \forall \omega \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{F}_n(q_{\ell,k}; \omega) = F(q_{\ell,k}).$$

Für

$$\Delta_{n,k}(\omega) = \max_{\ell \in \{0, \dots, k\}} \max \left(\left| \widehat{F}_n(q_{\ell,k}; \omega) - F(q_{\ell,k}) \right|, \left| \widehat{F}_n^-(q_{\ell,k}; \omega) - F^-(q_{\ell,k}) \right| \right)$$

folgt

$$\exists A_k \in \mathfrak{E} \forall \omega \in A_k : \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{n,k}(\omega) = 0. \quad (2)$$

Lemma II.3.3 zeigt

$$F^-(q_{\ell,k}) - F(q_{\ell-1,k}) \leq \ell/k - (\ell-1)/k = 1/k.$$

Hiermit folgt für $x \in]q_{\ell-1,k}, q_{\ell,k}[$ und $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned}\widehat{F}_n(x; \omega) &\leq \widehat{F}_n^-(q_{\ell,k}; \omega) \leq F^-(q_{\ell,k}) + \Delta_{n,k}(\omega) \leq F(q_{\ell-1,k}) + 1/k + \Delta_{n,k}(\omega) \\ &\leq F(x) + 1/k + \Delta_{n,k}(\omega)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\widehat{F}_n(x; \omega) &\geq \widehat{F}_n(q_{\ell-1,k}; \omega) \geq F(q_{\ell-1,k}) - \Delta_{n,k}(\omega) \geq F^-(q_{\ell,k}) - 1/k - \Delta_{n,k}(\omega) \\ &\geq F(x) - 1/k - \Delta_{n,k}(\omega).\end{aligned}$$

Für $\omega \in A_k$ ergibt sich gemäß (2)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x; \omega) - F(x)| \leq 1/k.$$

Fazit: für

$$A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}$$

gilt

$$P(A) = 1$$

und

$$\forall \omega \in A : \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widehat{F}_n(x; \omega) - F(x)| = 0.$$

□

Die Abbildungen VII.8–VII.16 illustrieren den Satz von Glivenko-Cantelli, wobei jeweils schwarz eine empirische Verteilungsfunktion und blau die Verteilungsfunktion dargestellt sind. Verwendet werden $n = 50, 250, 1000$ Simulationen. Die zugrundeliegende Verteilungen sind gegeben durch

$$P(\{X_1 = 1\}) = 0.3, \quad P(\{X_1 = 2\}) = 0.2, \quad P(\{X_1 = 3\}) = 0.5$$

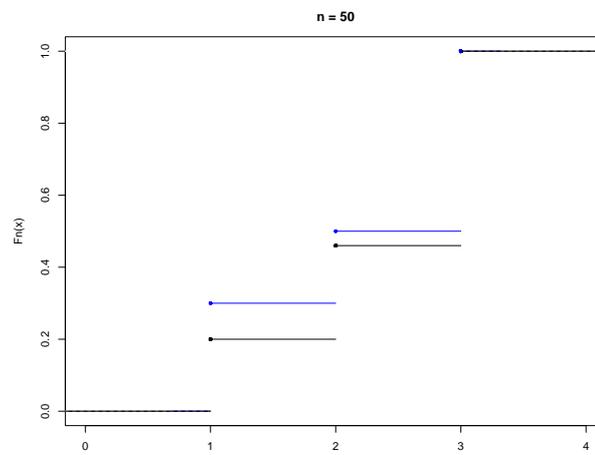
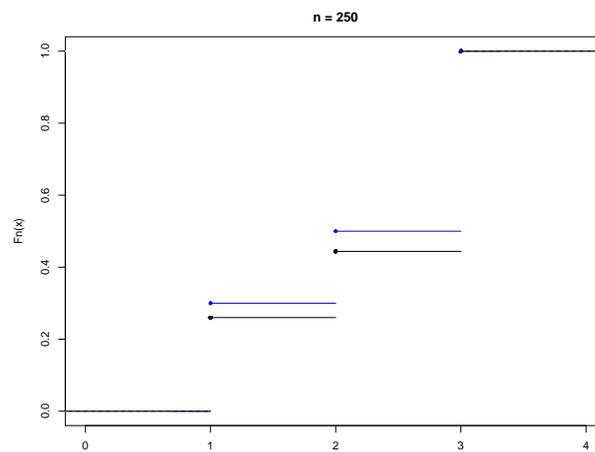
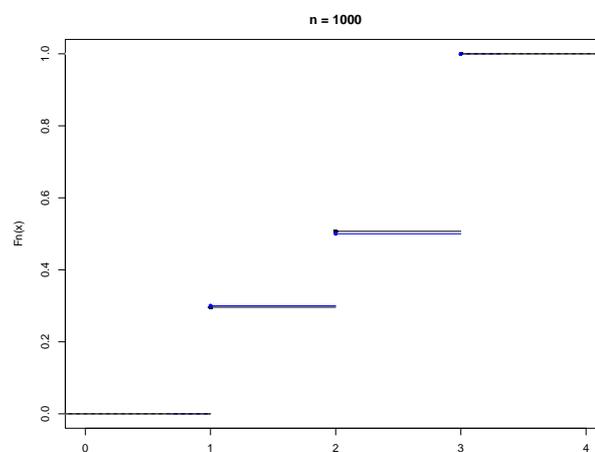
in den Abbildungen VII.8–VII.10,

$$X_1 \sim \mathbf{U}([0, 1])$$

in den Abbildungen VII.11–VII.13 und

$$X_1 \sim \mathbf{Exp}(1/2)$$

in den Abbildungen VII.14–VII.16.

Abbildung VII.8: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 50$ Abbildung VII.9: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 250$ Abbildung VII.10: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 1000$

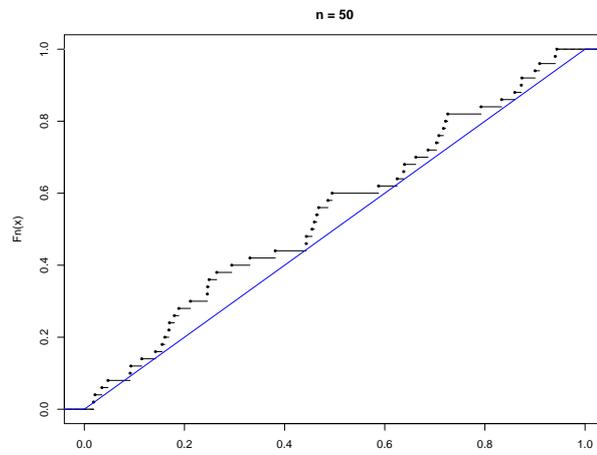


Abbildung VII.11: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 50$

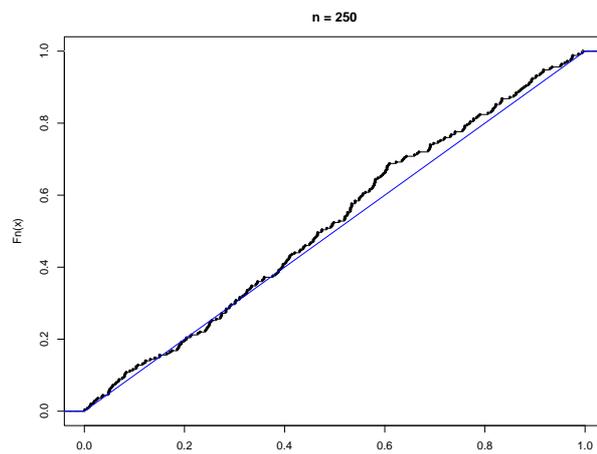


Abbildung VII.12: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 250$

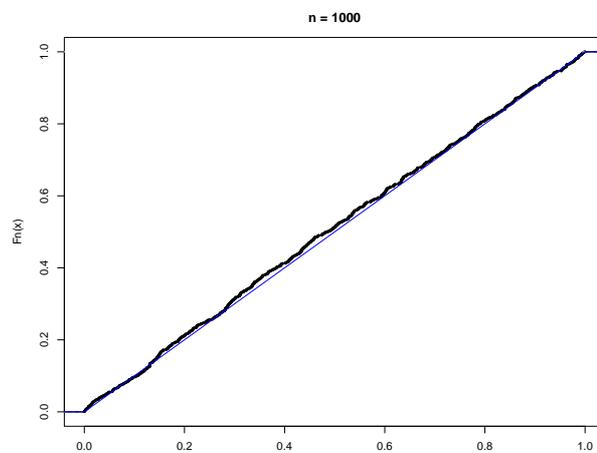
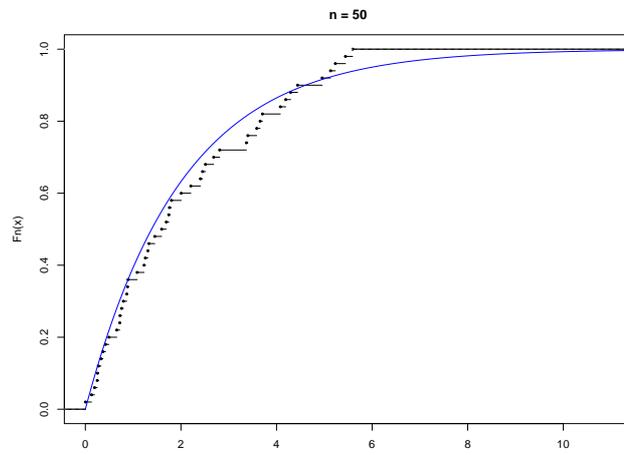
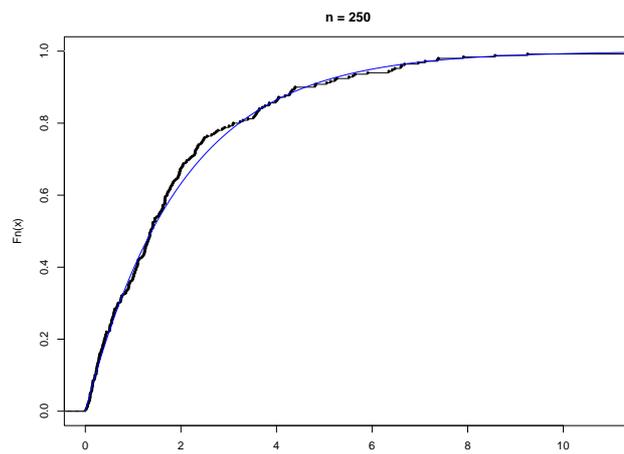
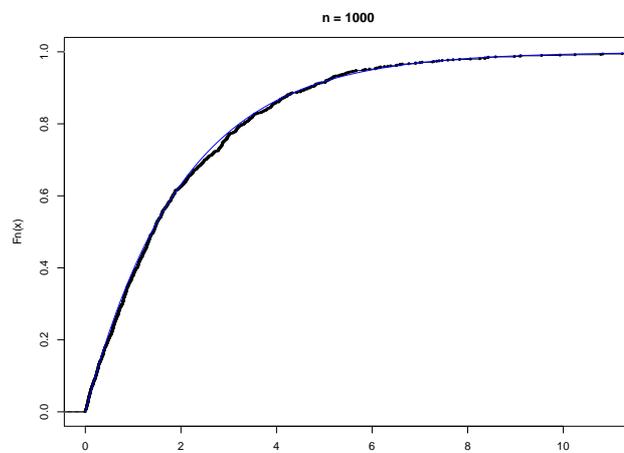


Abbildung VII.13: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 1000$

Abbildung VII.14: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 50$ Abbildung VII.15: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 250$ Abbildung VII.16: Verteilungsfunktion und empirische Verteilungsfunktion, $n = 1000$

Abschließend: Vergleich der Konvergenzbegriffe im Starken und Schwachen Gesetz der großen Zahlen. Anwendung des folgenden Resultates mit $Y_n := S_n/n - E(X_1)$.

Satz 12. Gilt fast sicher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0$$

für eine Folge von Zufallsvariablen $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|Y_n| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Beweis. ÜBUNG. Siehe auch ÜBUNG.

□

Definitionen und Bezeichnungen

- Additivität, 6
- Arcussinus-Verteilung, 60
- bedingte Wahrscheinlichkeit, 7
- Bernoulli-Verteilung, 33
 - symmetrisch, 44
- Binomialverteilung, 35
- Borel-messbare Abbildung, 86
- Borel-Menge, 65
- Dichte, *siehe* Wahrscheinlichkeitsdichte
- direkte Simulation, 19, 98
- Ereignis, 1
- Ereignisraum, 1
- Ergebnis, 1
- Ergebnisraum, 1
- Erwartungswert, 83
- Exponentialverteilung, 75
- geometrische Verteilung, 41
- Gleichverteilung
 - diskret, 4
 - kontinuierlich, 19, 75
- hypergeometrische Verteilung, 38
- Indikatorfunktion, 11
- Inversionsmethode, 25
- Irrfahrt
 - einfach, 93
 - symmetrisch Bernoulli-, 44
- Konvergenz
 - in Verteilung, 109
- Korrelationskoeffizient, 89
- Kovarianz, 89
- Laplace-Annahme, 4
- Lebesgue-Maß, 67
- Limes superior, 95
- Mächtigkeit, 2
- Median, 24
- Monotonie, 6
- Normalverteilung
 - eindimensional, 77
- paarweise disjunkte Mengen, 4
- Poisson-Verteilung, 38
- Potenzmenge, 2
- Produktmaß, 32
- Produktraum, 32
- Quantil, 24
- Randverteilung, 69
- σ -Additivität, 4
- σ -Algebra, 3
 - Borelsch, 65
 - erzeugt, 65
- σ -Stetigkeit von oben, 6
- σ -Stetigkeit von unten, 6
- σ -Subadditivität, 6
- Standard-Normalverteilung
 - eindimensional, 77
 - mehrdimensional, 81
- Standardabweichung, 88
- standardisierte Summenvariable, 111
- Tensorprodukt, 80
- Unabhängigkeit

- einer Folge von Ereignissen, 10
 - einer Folge von Zufallsvariablen, 15
 - paarweise, 11
 - zweier Ereignisse, 10
- Varianz, 88
- Verteilung, 69
- absolutstetig, 75
 - diskret, 33
 - gemeinsam, 69
- Verteilungsfunktion, 13
- empirisch, 19
- Wahrscheinlichkeitsdichte, 74
- Wahrscheinlichkeitsfunktion, 27
- Wahrscheinlichkeitsmaß, 4
- Wahrscheinlichkeitsraum, 4
- diskret, 27
- Wahrscheinlichkeitsverteilung, 4
- Zufallsvariable, 12
- absolutstetig verteilt, 75
 - arcussinus-verteilt, 60
 - Bernoulli-verteilt, 33
 - binomialverteilt, 35
 - diskret, 33
 - exponentialverteilt, 75
 - geometrisch verteilt, 41
 - gleichverteilt, 19, 75
 - hypergeometrisch verteilt, 38
 - integrierbar, 83
 - normalverteilt, 77
 - Poisson-verteilt, 38
 - quadratisch integrierbar, 88
 - Realisierung, 18
 - standard-normalverteilt, 77
 - symmetrisch Bernoulli-verteilt, 44
- Zufallsvariablen
- identisch verteilt, 13, 15
 - iid, 16
 - Realisierung, 18
 - unkorreliert, 89
- Zufallsvektor, 68
- absolutstetig verteilt, 75
 - gleichverteilt, 75
 - standard-normalverteilt, 81
- Zufallsvektoren
- identisch verteilt, 69
- Zufallszahlen, 20