

Inhaltsverzeichnis

I	Grundbegriffe	1
1	Wahrscheinlichkeitsräume	1
2	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit	7
3	Reellwertige Zufallsvariablen	11
II	Stochastische Simulation	17
1	Die Methode der direkten Simulation	17
2	Zufallszahlen	19
3	Die Inversionsmethode	24
III	Diskrete Modelle	27
1	Wahrscheinlichkeitsfunktionen	27
2	Elementare Kombinatorik	28
3	Produkt Räume	31
4	Diskrete Zufallsvariablen	33
5	Die symmetrische Bernoulli-Irrfahrt	44
IV	Grundlagen allgemeiner Modelle	63
1	Die Borelsche σ -Algebra in \mathbb{R}^d	63
2	Das d -dimensionale Lebesgue-Maß	66
3	Verteilungen	68
V	Absolutstetige Modelle	73
1	Wahrscheinlichkeitsdichten	73
2	Absolutstetig verteilte Zufallsvariablen	74
VI	Erwartungswert und Varianz	83
1	Der Erwartungswert	83
2	Varianz und Kovarianz	87

Kapitel VI

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert und Varianz sind fundamentale Kenngrößen der Verteilung einer reellwertigen Zufallsvariable.

1 Der Erwartungswert

Erwartungswert: „mittlerer Wert“ einer Zufallsvariablen, „Schwerpunkt“ ihrer Verteilung. Die allgemeine Definition basiert auf dem abstraktem Lebesgue-Integral, siehe Georgii (2007, Abschn. 4.1.2).

Bemerkung 1. Die Menge der Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ bildet einen Vektorraum, der auch abgeschlossen unter Multiplikation ist. Auf dem Untervektorraum $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ der *integrierbaren Zufallsvariablen* erklärt man das Integral

$$E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega),$$

genannt *Erwartungswert* von X . Für $A \in \mathfrak{A}$ gilt $1_A \in \mathfrak{L}_1$ und

$$E(1_A) = P(A).$$

Die Abbildung $E : \mathfrak{L}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear und monoton, d.h. für $X, Y \in \mathfrak{L}_1$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

- $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$,
- $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$.

Ferner gilt für Zufallsvariablen X und Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$

- $|X| \leq Y \wedge Y \in \mathfrak{L}_1 \Rightarrow X \in \mathfrak{L}_1$,

- falls $X \geq 0$: $X \in \mathfrak{L}_1 \wedge E(X) = 0 \Leftrightarrow P(\{X > 0\}) = 0$.

Wir betrachten die Spezialfälle

- (i) X diskret, also $P(\{X \in D\}) = 1$ für eine abzählbare Menge, $D \subset \mathbb{R}$
- (ii) X absolutstetig mit Dichte f_X .

Die folgenden Sätze dienen uns als Definitionen, siehe Irle (2001, Kap. 8) oder Georgii (2007, Abschn. 4.1).

Satz 2. Im Fall (i) gilt $X \in \mathfrak{L}_1$ genau dann, wenn $\sum_{x \in D} |x| \cdot P(\{X = x\}) < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$E(X) = \sum_{x \in D} x \cdot P(\{X = x\}).$$

Satz 3. Im Fall (ii) gilt $X \in \mathfrak{L}_1$ genau dann, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) dx < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx.$$

Bemerkung 4. Die Integrierbarkeit von X und gegebenenfalls $E(X)$ hängt nur von der Verteilung P_X ab.

Satz 5.

$$\begin{aligned} X \sim \mathbf{B}(n, p) &\Rightarrow E(X) = n \cdot p \\ X \sim \mathbf{G}(p) &\Rightarrow E(X) = 1/p \\ X \sim \mathbf{P}(\lambda) &\Rightarrow E(X) = \lambda \\ X \sim \mathbf{U}([a, b]) &\Rightarrow E(X) = (a + b)/2 \\ X \sim \mathbf{Exp}(\lambda) &\Rightarrow E(X) = 1/\lambda \\ X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2) &\Rightarrow E(X) = \mu \end{aligned}$$

Beweis. Für $X \sim \mathbf{B}(1, p)$ gilt

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

Für $X \sim \mathbf{B}(n, p)$ könne wir wegen Bemerkung 4 und Satz III.4.8 oBdA annehmen, daß

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

mit X_1, \dots, X_n iid und $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$. Also

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \cdot E(X_1) = n \cdot p.$$

Beachte, daß hier die Unabhängigkeit nicht verwendet wurde.

Sei f_X die Dichte von $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) \, dx &= \int_0^{\infty} x \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda x) \, dx = -x \cdot \exp(-\lambda x) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) \, dx \\ &= \frac{-1}{\lambda} \exp(-\lambda x) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Für die restlichen Verteilungen ÜBUNG. □

Beispiel 6. Betrachte Rückkehrzeit

$$\tau_{\infty} := \inf\{t \in \mathbb{N} : S_t = 0\}$$

der symmetrischen Bernoulli-Irrfahrt $(S_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit unendlichem Zeithorizont. Es gilt $P(\{\tau_{\infty} < \infty\}) = 1$, siehe Satz III.5.25, aber $\tau_{\infty} \neq \mathfrak{L}_1$, siehe ÜBUNG.

Nun: Hilfsmittel zur Berechnung von Erwartungswerten.

Bezeichnung. $(\Omega_j)_{j \in J}$ abzählbare Partition von Ω , falls

- (i) J abzählbar,
- (ii) $\Omega_j \in \mathfrak{A}$ für alle $j \in J$,
- (iii) $\Omega_j \cap \Omega_{\ell} = \emptyset$ für $j \neq \ell$,
- (iv) $\Omega = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$.

Lemma 7. Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, und sei $(\Omega_j)_{j \in J}$ eine abzählbare Partition von Ω . Gelte

$$\forall j \in J \exists c_j \in \mathbb{R} \forall \omega \in \Omega_j : X(\omega) = c_j.$$

Dann gilt $X \in \mathfrak{L}_1$ genau dann, wenn

$$\sum_{j \in J} |c_j| \cdot P(\Omega_j) < \infty.$$

Gegebenenfalls folgt

$$E(X) = \sum_{j \in J} c_j \cdot P(\Omega_j).$$

Beweis. Für

$$D := \{c_j : j \in J\}$$

gilt

$$P(\{X \in D\}) = 1.$$

Setze $J_x = \{j \in J : c_j = x\}$ für $x \in D$. Dann

$$\begin{aligned} \sum_{x \in D} |x| \cdot P(\{X = x\}) &= \sum_{x \in D} |x| \cdot \sum_{j \in J_x} P(\Omega_j) = \sum_{x \in D} \sum_{j \in J_x} |c_j| \cdot P(\Omega_j) \\ &= \sum_{j \in J} |c_j| \cdot P(\Omega_j). \end{aligned}$$

Berechnung des Erwartungswertes analog ohne Beträge. □

Bemerkung 8. Satz 2 beruht auf der abzählbaren Partition $(\{X = x\})_{x \in D}$.

Korollar 9. Falls $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ diskret, gilt $X \in \mathfrak{L}_1$ genau dann, wenn

$$\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot P(\{\omega\}) < \infty.$$

Gegebenenfalls folgt

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}).$$

Beweis. Wähle $J := \Omega$, $\Omega_j := \{j\}$ und $c_j := X(j)$ in Lemma 7. □

Definition 10. $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Borel-meißbar*, falls

$$\forall A \in \mathfrak{B}_1 : g^{-1}(A) \in \mathfrak{B}_d.$$

Bemerkung 11.

- (i) Die Menge der Borel-meißbaren Funktionen $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum, der auch abgeschlossen unter Multiplikation ist.
- (ii) Jede stetige Funktion $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist Borel-meißbar.
- (iii) $g = 1_A$ mit $A \in \mathfrak{B}_d$ ist Borel-meißbar.

Siehe Irle (2001, Kap. 7).

Nun: ein Transformationssatz für den Erwartungswert.

Lemma 12. Sei X ein d -dimensionaler Zufallsvektor mit Dichte f_X und $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-meißbar. Genau dann gilt $h(X) \in \mathfrak{L}_1$, wenn $\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)| \cdot f_X(x) dx < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$E(h(X)) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \cdot f_X(x) dx < \infty.$$

Beweis. Siehe Irle ([2001](#), Satz 8.25). □

Beachte: Lemma 12 gilt ohne die Annahme, daß $h(X)$ absolutstetig verteilt ist.

Satz 13. Sind $X, Y \in \mathfrak{L}_1$ unabhängig, so folgt $X \cdot Y \in \mathfrak{L}_1$ und

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Beweis. Siehe Irle ([2001](#), Satz 10.16). Hier Beweis unter der zusätzlichen Annahme, daß X, Y diskrete Zufallsvariablen sind.

Wähle $D \subset \mathbb{R}$ abzählbar mit $P(\{X \in D\}) = P(\{Y \in D\}) = 1$, setze

$$\begin{aligned}\Omega_{(x,y)} &= \{(X, Y) = (x, y)\}, & (x, y) \in D^2, \\ \Omega_* &= \{X \notin D\} \cup \{Y \notin D\}\end{aligned}$$

sowie

$$X' = 1_D \cdot X \quad \text{und} \quad Y' = 1_D \cdot Y.$$

Dann

$$P(\{X \cdot Y \neq X' \cdot Y'\}) \leq P(\{X \notin D\} \cup \{Y \notin D\}) = 0.$$

Also folgt $P_{X \cdot Y} = P_{X' \cdot Y'}$ und somit $X \cdot Y \in \mathfrak{L}_1 \Leftrightarrow X' \cdot Y' \in \mathfrak{L}_1$.

Ferner gilt

$$\sum_{(x,y) \in D^2} |x \cdot y| \cdot P(\Omega_{(x,y)}) + 0 \cdot P(\Omega_*) = \sum_{x \in D} |x| \cdot P(\{X = x\}) \cdot \sum_{y \in D} |y| \cdot P(\{Y = y\}) < \infty,$$

und Lemma 7 zeigt $X' \cdot Y' \in \mathfrak{L}_1$.

Berechnung des Erwartungswertes analog ohne Beträge.

Im Spezialfall absolutstetiger Zufallsvariablen X, Y verwendet man den Satz von Fubini und Satz V.2.21.(i). □

2 Varianz und Kovarianz

Varianz: „Streuungsmaß“ für die Verteilung einer Zufallsvariablen.

Definition 1. X quadratisch integrierbar, falls $X^2 \in \mathfrak{L}_1$. Bez.: $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Menge der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen.

Satz 2. \mathfrak{L}_2 ist Untervektorraum von \mathfrak{L}_1 .

Beweis. Verwende $|X| \leq 1 + X^2$ und $(X + Y)^2 \leq 2X^2 + 2Y^2$. □

Bemerkung 3. Die quadratische Integrierbarkeit von X und gegebenenfalls $E(X^2)$ hängt nur von der Verteilung P_X ab.

Satz 4. Im Fall (i) gilt $X \in \mathfrak{L}_2$ genau dann, wenn $\sum_{x \in D} x^2 \cdot P(\{X = x\}) < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$E(X^2) = \sum_{x \in D} x^2 \cdot P(\{X = x\}).$$

Beweis. Wende Lemma 1.7 mit $J := D$, $\Omega_j := \{X = j\}$ und $c_j := j^2$ an. □

Satz 5. Im Fall (ii) gilt $X \in \mathfrak{L}_2$ genau dann, wenn $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx < \infty$. Gegebenenfalls folgt

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx.$$

Beweis. Wende Lemma 1.12 mit $h(x) := x^2$ an. □

Definition 6. Für $X \in \mathfrak{L}_2$ heißt

$$\text{Var}(X) := E(X - E(X))^2$$

die *Varianz* und $\sqrt{\text{Var}(X)}$ die *Standardabweichung* von X .

Nun: Abschätzung für die Konzentration einer Zufallsvariable um ihren Erwartungswert.

Bemerkung 7. Für $X \in \mathfrak{L}_2$ gilt

$$\text{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow P(\{X = E(X)\}) = 1.$$

Satz 8 (Tschebyschev-Ungleichung). Für $X \in \mathfrak{L}_2$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$P(\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \text{Var}(X)$$

Beweis. Für $A := \{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\varepsilon^2 \cdot 1_A \leq (X - E(X))^2 \cdot 1_A \leq (X - E(X))^2.$$

Es folgt

$$\varepsilon^2 \cdot P(A) = \varepsilon^2 \cdot E(1_A) \leq E(X - E(X))^2.$$

□

Satz 9. Für $X \in \mathfrak{L}_2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$

(ii) $\text{Var}(\alpha \cdot X + \beta) = \alpha^2 \cdot \text{Var}(X).$

Beweis. Ad (i): Es gilt

$$(X - E(X))^2 = X^2 - 2 \cdot X \cdot E(X) + (E(X))^2.$$

Es folgt

$$E(X - E(X))^2 = E(X^2) - 2 \cdot (E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Ad (ii): Es gilt

$$\alpha \cdot X + \beta - E(\alpha \cdot X + \beta) = \alpha \cdot (X - E(X)).$$

Es folgt

$$\text{Var}(\alpha \cdot X + \beta) = E(\alpha^2 \cdot (X - E(X))^2) = \alpha^2 \cdot \text{Var}(X).$$

□

Bemerkung 10. Für $X, Y \in \mathfrak{L}_2$ gilt $X \cdot Y \in \mathfrak{L}_1$. Zum Beweis verwende man $|X \cdot Y| \leq X^2 + Y^2$.

Definition 11. Betrachte $X, Y \in \mathfrak{L}_2$.

(i) Die *Kovarianz* von X und Y ist definiert durch

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))).$$

(ii) X, Y heißen *unkorreliert*, falls $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

(iii) Falls $\text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$, so ist der *Korrelationskoeffizient* von X und Y definiert durch

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}.$$

Bemerkung 12.

(i) Für $X, Y \in \mathfrak{L}_2$ gilt

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y).$$

(ii) $X, Y \in \mathfrak{L}_2$ unabhängig $\Rightarrow X, Y$ unkorreliert, siehe Satz 1.13. Die Umkehrung ist falsch, siehe ÜBUNG.

Satz 13 (Formel von Bienaymé). Falls $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{L}_2$ paarweise unkorreliert,

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i).$$

Beweis. Setze $Y_i := X_i - E(X_i)$ („zentrieren“). Für $i \neq j$ gilt $E(Y_i \cdot Y_j) = 0$. Also

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) &= \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) = E \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n E(Y_i \cdot Y_j) = \sum_{i=1}^n E(Y_i^2) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i). \end{aligned}$$

□

Beispiel 14. Für $X_1 \sim \mathbf{B}(1, 1/2)$ und $X_2 = -X_1$ gilt $\text{Var}(X_1 + X_2) = 0$ und $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = 1/4$.

Satz 15.

$$\begin{aligned} X \sim \mathbf{B}(n, p) &\Rightarrow \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) \\ X \sim \mathbf{G}(p) &\Rightarrow \text{Var}(X) = (1 - p)/p^2 \\ X \sim \mathbf{P}(\lambda) &\Rightarrow \text{Var}(X) = \lambda \\ X \sim \mathbf{U}([a, b]) &\Rightarrow \text{Var}(X) = (b - a)^2/12 \\ X \sim \mathbf{Exp}(\lambda) &\Rightarrow \text{Var}(X) = 1/\lambda^2 \\ X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2) &\Rightarrow \text{Var}(X) = \sigma^2 \end{aligned}$$

Beweis. Für $X \sim \mathbf{B}(1, p)$ gilt

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p \cdot (1 - p).$$

Für $X \sim \mathbf{B}(n, p)$ können wir wegen der Bemerkungen 1.4 und 3 und Satz III.4.8 oBdA annehmen, daß

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

mit X_1, \dots, X_n iid und $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$. Mit Satz 13 folgt

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p).$$

Für $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ gilt

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda x) dx \\ &= -x^2 \cdot \exp(-\lambda x) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x \cdot \exp(-\lambda x) dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \cdot E(X) = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Demnach gilt $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$ und

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Für die restlichen Verteilungen ÜBUNG. □

Satz 16 (Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung). Für $X, Y \in \mathfrak{L}_2$ gilt

$$|E(X \cdot Y)| \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}.$$

Beweis. ÜBUNG. □

Bemerkung 17. Für $X, Y \in \mathfrak{L}_2$ mit $\text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$ gilt

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1,$$

Satz 18. Für $X, Y \in \mathfrak{L}_2$ mit $\text{Var}(X) > 0$ seien

$$b^* = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}, \quad a^* = E(Y) - b^* \cdot E(X).$$

Dann

$$E(Y - (a^* + b^* \cdot X))^2 = \text{Var}(Y) \cdot (1 - \rho^2(X, Y)) \quad (1)$$

und

$$E(Y - (a^* + b^* \cdot X))^2 \leq E(Y - (a + b \cdot X))^2 \quad (2)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis. ÜBUNG. □

Bemerkung 19.

- (i) Interpretation von (2): $a^* + b^* \cdot X$ ist die beste lineare Vorhersage von Y bei Beobachtung von X bzgl. des \mathfrak{L}_2 -Abstandes.
- (ii) Interpretation von (1): $\rho^2(X, Y)$ und $\text{sgn}(\rho(X, Y))$ geben den Grad und die Richtung des linearen Zusammenhang von X und Y an. Extremfälle:

$$|\rho(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow P(\{Y = a^* + b^* \cdot X\}) = 1,$$

und $\rho(X, Y) = 0$ gilt genau dann, wenn X nicht in die beste lineare Vorhersage eingeht.

- (iii) Interpretation von Satz 18: orthogonale Projektion von Y auf den von 1 und X erzeugten Unterraum des Hilbertraumes L_2 .

Definitionen und Bezeichnungen

- Additivität, 6
- Arcussinus-Verteilung, 60
- bedingte Wahrscheinlichkeit, 7
- Bernoulli-Verteilung, 33
 - symmetrisch, 44
- Binomialverteilung, 35
- Borel-meßbare Abbildung, 86
- Borel-Menge, 65
- Dichte, *siehe* Wahrscheinlichkeitsdichte
- direkte Simulation, 19
- Ereignis, 1
- Ereignisraum, 1
- Ergebnis, 1
- Ergebnisraum, 1
- Erwartungswert, 83
- Exponentialverteilung, 75
- geometrische Verteilung, 41
- Gleichverteilung
 - diskret, 4
 - kontinuierlich, 19, 75
- hypergeometrische Verteilung, 38
- Indikatorfunktion, 11
- Inversionsmethode, 25
- Irrfahrt
 - symmetrisch Bernoulli-, 44
- Korrelationskoeffizient, 89
- Kovarianz, 89
- Laplace-Annahme, 4
- Lebesgue-Maß, 67
- Mächtigkeit, 2
- Median, 24
- Monotonie, 6
- Normalverteilung
 - eindimensional, 77
- paarweise disjunkte Mengen, 4
- Poisson-Verteilung, 38
- Potenzmenge, 2
- Produktmaß, 32
- Produktraum, 32
- Quantil, 24
- Randverteilung, 69
- σ -Additivität, 4
- σ -Algebra, 3
 - Borelsch, 65
 - erzeugt, 65
- σ -Stetigkeit von oben, 6
- σ -Stetigkeit von unten, 6
- σ -Subadditivität, 6
- Standard-Normalverteilung
 - eindimensional, 77
 - mehrdimensional, 81
- Standardabweichung, 88
- Tensorprodukt, 80
- Unabhängigkeit
 - einer Folge von Ereignissen, 10
 - einer Folge von Zufallsvariablen, 15
 - paarweise, 11
 - zweier Ereignisse, 10

- Varianz, 88
- Verteilung, 69
 - absolutstetig, 75
 - diskret, 33
 - gemeinsam, 69
- Verteilungsfunktion, 13
 - empirisch, 19
- Wahrscheinlichkeitsdichte, 74
- Wahrscheinlichkeitsfunktion, 27
- Wahrscheinlichkeitsmaß, 4
- Wahrscheinlichkeitsraum, 4
 - diskret, 27
- Wahrscheinlichkeitsverteilung, 4
- Zufallsvariable, 12
 - absolutstetig verteilt, 75
 - arcussinus-verteilt, 60
 - Bernoulli-verteilt, 33
 - binomialverteilt, 35
 - diskret, 33
 - exponentialverteilt, 75
 - geometrisch verteilt, 41
 - gleichverteilt, 19, 75
 - hypergeometrisch verteilt, 38
 - integrierbar, 83
 - normalverteilt, 77
 - Poisson-verteilt, 38
 - quadratisch integrierbar, 87
 - Realisierung, 18
 - standard-normalverteilt, 77
 - symmetrisch Bernoulli-verteilt, 44
- Zufallsvariablen
 - identisch verteilt, 13, 15
 - iid, 16
 - Realisierung, 18
 - unkorreliert, 89
- Zufallsvektor, 68
 - absolutstetig verteilt, 75
 - gleichverteilt, 75
 - standard-normalverteilt, 81
- Zufallsvektoren
 - identisch verteilt, 69
 - Zufallszahlen, 20