Inhaltsverzeichnis

I Grundbegriffe **1**

1 Wahrscheinlichkeitsräume . . . 1

2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit . . . 7

3 Reellwertige Zufallsvariablen . . . 11

II Stochastische Simulation **17**

1 Die Methode der direkten Simulation . . . 17

2 Zufallszahlen . . . 19

3 Die Inversionsmethode . . . 24

III Diskrete Modelle **27**

1 Wahrscheinlichkeitsfunktionen . . . 27

2 Elementare Kombinatorik . . . 28

3 Produkträume . . . 31

4 Diskrete Zufallsvariablen . . . 33

5 Die symmetrische Bernoulli-Irrfahrt . . . 44

IV Grundlagen allgemeiner Modelle **63**

1 Die Borelsche σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$ . . . 63

2 Das d-dimensionale Lebesgue-Maß . . . 66

3 Verteilungen . . . 68

V Absolutstetige Modelle **73**

1 Wahrscheinlichkeitsdichten . . . 73

2 Absolutstetig verteilte Zufallsvariablen . . . 74

Kapitel V

Absolutstetige Modelle

Ist X eine diskrete Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so gilt $P(\{X \in D\}) = 1$ für eine abzählbare Menge $D \subset \mathbb{R}$, und für alle $A \in \mathfrak{B}_1$ folgt

$$P(\{X \in A\}) = P(\{X \in A\} \cap \{X \in D\}) = \sum_{x \in A \cap D} P(\{X = x\}).$$

In diesem Kapitel untersuchen wir Zufallsvariablen, bei denen die Summation der Wahrscheinlichkeitsfunktion $x \mapsto P(\{X = x\})$ über $A \cap D$ durch die Integration einer geeigneten Funktion $x \mapsto f_X(x)$ über A ersetzt wird. Also

$$P(\{X \in A\}) = \int_A f_X(x)\, dx.$$

1 Wahrscheinlichkeitsdichten

Bemerkung 1. Integralbegriffe für Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

(i) Lebesgue-Integral (Vorlesung Analysis IV), siehe auch Georgii (2007, p. 17).

(ii) Spezialfall: Uneigentliches Riemann-Integral (Walther, Analysis II, Springer-Verlag, 1990, §7.20).

(iii) Spezialfall: Für abgeschlossene Intervalle $B_i \subseteq \mathbb{R}$ und $B := B_1 \times \cdots \times B_d \subseteq \mathbb{R}^d$ sei $f|_B$ stetig. Setze $B^{(K)} := B \cap [-K, K]^d$. Falls $\sup_{K \in \mathbb{N}} \int_{B^{(K)}} |f(x)|\, dx < \infty$, so gilt

$$\int_B f(x)\, dx = \lim_{K \to \infty} \int_{B^{(K)}} f(x)\, dx.$$

Berechnung von $\int_{B^{(K)}} f(x)\, dx$ mit $B^{(K)} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ als iteriertes Integral

$$\int_{B^{(K)}} f(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_d}^{b_d} f(x_1, \ldots, x_d)\, dx_d \ldots dx_1.$$

Definition 2. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ heißt *Wahrscheinlichkeitsdichte*, kurz *Dichte*, falls f (Lebesgue)-integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = 1.$$

Satz 3. Jede Dichte f definiert durch

$$P(A) := \int_A f(x)\, dx, \qquad A \in \mathfrak{B}_d,$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}_d$.

Beweis. Klar: $P \geq 0$ und $P(\mathbb{R}^d) = 1$.
Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}_d$ p.d. und $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(x) \cdot f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{\infty} 1_{A_i}(x) \cdot f(x)\, dx \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A_i}(x) \cdot f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \end{aligned}$$

aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz. □

Vgl. Satz 3 mit Satz III.1.3 über Wahrscheinlichkeitsfunktionen.
Nun zur Eindeutigkeit von Dichten.

Lemma 4. Seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall A \in \mathfrak{B}_d : \int_A f(x)\, dx = \int_A g(x)\, dx,$

(ii) $\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$

Beweis. Folgt aus Meintrup, Schäffler (2005, Satz 2.15). □

Ausblick: singuläre Verteilungen.

2 Absolutstetig verteilte Zufallsvariablen

Satz 1.3 und Bemerkung IV.3.5 erlauben die Modellierung von Verteilungen durch Vorgabe ihrer Dichten. Ein erstes Beispiel haben wir mit Definition III.5.22 kennengelernt.

Im folgenden sei $d \in \mathbb{N}$ und $X = (X_1, \ldots, X_d)$ bezeichne einen d-dimensionaler Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Definition 1. X heißt *absolutstetig verteilt*, falls P_X eine Dichte besitzt. Diese wird ggf. mit f_X bezeichnet.

Definition 2. Sei $B \in \mathfrak{B}_d$ mit Lebesgue-Maß (Länge, Flächeninhalt, Volumen) $\lambda_d(B) \in]0, \infty[$. Ein Zufallsvektor X mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda_d(B)} \cdot 1_B(x)$$

heißt *gleichverteilt* auf B. Bez.: $X \sim \mathbf{U}(B)$.

Bemerkung 3. Für $X \sim \mathbf{U}(B)$ und $A \in \mathfrak{B}_d$ gilt

$$P_X(A) = \frac{1}{\lambda_d(B)} \cdot \int_A 1_B(x)\, dx = \frac{\lambda_d(A \cap B)}{\lambda_d(B)}.$$

Beispiel 4. Dichte und Verteilungsfunktion von $X \sim \mathbf{U}([a, b])$ mit $a < b$ sind gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } x \in [a, b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } x \in [a, b] \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 5. $X \sim \mathbf{U}(B)$ zur Modellierung von Pfeiltreffer auf Dartscheibe, Glücksrad.

Wichtige Anwendung der Gleichverteilung: Zufallszahlen und stochastische Simulation, siehe Kapitel II.

Definition 6. Eine Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda x), & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\lambda > 0$ heißt *exponentialverteilt* mit Parameter λ. Bez.: $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$.

Bemerkung 7. Für $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ und $x > 0$ gilt

$$F_X(x) = \lambda \cdot \int_0^x \exp(-\lambda y)\; dy = 1 - \exp(-\lambda x)$$

Klar: $F_X(x) = 0$, falls $x \leq 0$.

Beispiel 8. Dichten und Verteilungsfunktionen exponentialverteilter Zufallsvariablen sind in den Abbildungenen V.1 und V.2 dargestellt.

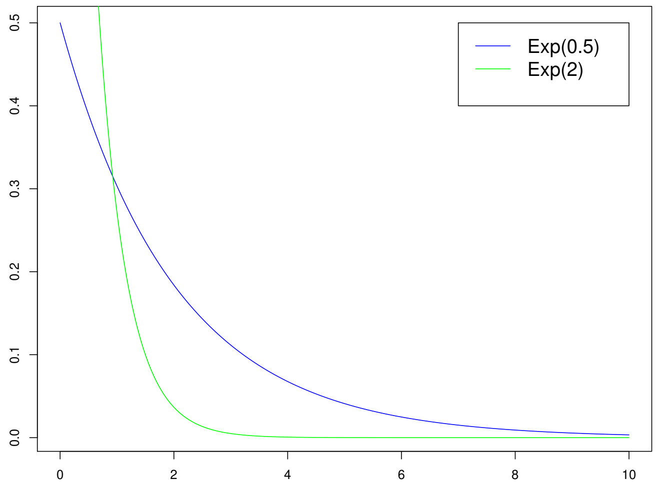

Abbildung V.1: Dichten exponentialverteilter Zufallsvariablen

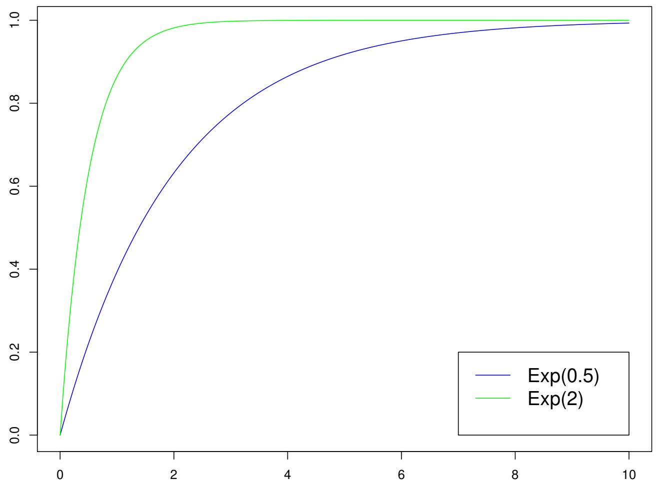

Abbildung V.2: Verteilungsfunktionen exponentialverteilter Zufallsvariablen

Nun: Charakterisierung der Exponentialverteilung durch ihre Gedächtnislosigkeit.

Satz 9. Für eine Zufallsvariable X mit

- $P(\{X > 0\}) = 1$ und
- $\forall t > 0 : P(\{X > t\}) > 0$

sind äquivalent

(i) $\exists \lambda > 0 : \ X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$,

(ii) $\forall s, t > 0 : P(\{X > t + s\} \mid \{X > t\}) = P(\{X > s\})$.

Beweis. Siehe $\boxed{\text{Übung}}$ und vgl. $\boxed{\text{Übung}}$. □

Beispiel 10. $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ zur Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten, radioaktivem Zerfall. Beim radioaktiven Zerfall bezeichne X den Zerfallszeitpunkt. Die Halbwertszeit $h > 0$ ist definiert durch

$$P(\{X \leq h\}) = \frac{1}{2}.$$

Man erhält

$$h = \ln(2)/\lambda.$$

Siehe auch Beispiel VII.3.8.

Lemma 11. Für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sqrt{2\pi\sigma^2}.$$

Beweis. OBdA $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ (Substitutionsregel). Es gilt

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) d(x,y) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \cdot r\, dr\, d\varphi \\
&= 2\pi \cdot \left(-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right)\Big|_0^{\infty} = 2\pi.
\end{aligned}$$

□

Definition 12. Eine Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ heißt *normalverteilt* mit Parametern μ und σ^2. Bez.: $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$. *Standard-Normalverteilung* als Spezialfall: $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

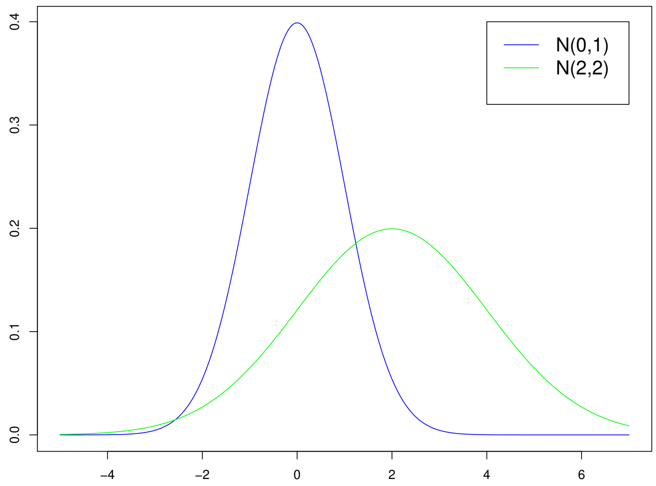

Abbildung V.3: Dichten normalverteilter Zufallsvariablen

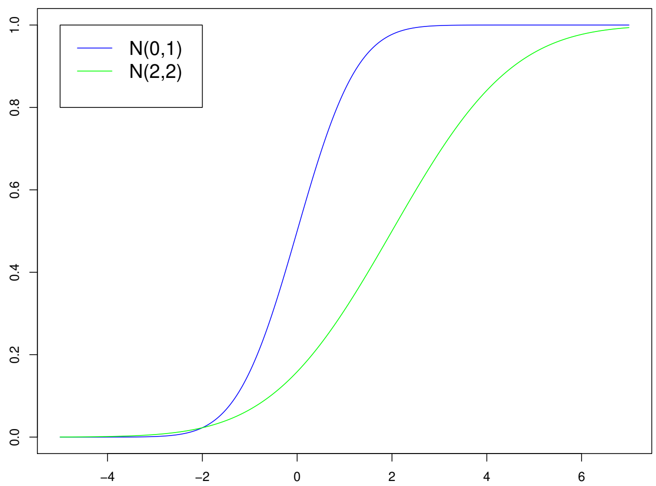

Abbildung V.4: Verteilungsfunktionen normalverteilter Zufallsvariablen

Beispiel 13. Dichten und Verteilungsfunktionen normalverteilter Zufallsvariablen sind in den Abbildungenen V.3 und V.4 dargestellt.

Beispiel 14. $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ zur Modellierung von (Meß)Fehlern. Siehe Abschnitt VII.3 zur zentralen Rolle der Normalverteilung in der Stochastik.

Bemerkung 15. Es gibt keine explizite Formel für die Verteilungsfunktion F_X, falls $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$. Bez.: $\Phi = F_X$, falls $X \sim \mathbf{N}(0, 1)$, also

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Zur Berechnung von Φ und entsprechender Quantile: Numerik, Tabellen, Plots.

Nun: der Zusammenhang zwischen Dichten und Verteilungsfunktionen.

Satz 16. Für eine Zufallsvariable X sind äquivalent

(i) F_X stetig differenzierbar,

(ii) X absolutstetig verteilt mit stetiger Dichte f_X.

Gilt (i) oder (ii), so folgt $F_X' = f_X$.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} F_X'(u)\, du.$$

Gem. Satz IV.1.9 stimmt P_X mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Dichte F_X' überein.
"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. $\square$

Ausblick: absolutstetige Funktionen.
Nun speziell: mehrdimensionale Dichten. Analytisches Hilfsmittel: der Satz von Fubini.

Lemma 17. Falls f_X Dichte von P_X ist, so besitzt P_{X_i} die Dichte

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_X(\overline{x}_1, x_i, \overline{x}_2)\, d(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$$

mit

$$\overline{x}_1 = (x_1, \dots, x_{i-1}), \qquad \overline{x}_2 = (x_{i+1}, \dots, x_d).$$

Beweis. Für $A_i \in \mathfrak{B}_1$ sei $A := \mathbb{R}^{i-1} \times A_i \times \mathbb{R}^{d-i}$. Dann

$$\begin{aligned} P(\{X_i \in A_i\}) = P(\{X \in A\}) &= \int_A f_X(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \int_{A_i} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1, \dots, x_d)\,dx_d \dots dx_1 \\ &= \int_{A_i} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_X(\overline{x}_1, x_i, \overline{x}_2)\,d(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}_{=:g(x_i)}\,dx_i, \end{aligned}$$

und g ist eine Dichte. □

Beispiel 18. Pfeiltreffer auf Dartscheibe. Hier

$$f_X(x_1, x_2) := \frac{1}{\pi r^2} \cdot 1_K(x_1, x_2)$$

mit

$$K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le r^2\}.$$

Also für $x_1 \in [-r, r]$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1, x_2)\,dx_2 = \frac{1}{\pi r^2} \cdot \int_{-\sqrt{r^2 - x_1^2}}^{\sqrt{r^2 - x_1^2}} 1\,dx_2 = \frac{2}{\pi r^2} \cdot \sqrt{r^2 - x_1^2}$$

sowie $f_{X_1}(x_1) = 0$, falls $|x_1| > r$. Klar

$$f_{X_1} = f_{X_2}.$$

Definition 19. Das *Tensorprodukt* $f_1 \otimes \ldots \otimes f_d : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ von Abbildungen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_d(x) := f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_d(x_d).$$

Vgl. Abschnitt III.3.

Lemma 20. Falls $f_1, \dots, f_d$ Dichten auf $\mathbb{R}$, so ist $f_1 \otimes \ldots \otimes f_d$ Dichte auf $\mathbb{R}^d$.

Beweis. Klar. Vgl. Lemma III.3.2. □

Satz 21.

(i) Falls $X_1, \dots, X_d$ unabhängig mit Dichten f_{X_i}, so besitzt X die Dichte

$$f_X = f_{X_1} \otimes \ldots \otimes f_{X_d}.$$

(ii) Falls X die Dichte

$$f_X = f_1 \otimes \ldots \otimes f_d$$

mit eindimensionalen Dichten f_i besitzt, so sind $X_1, \dots, X_d$ unabhängig mit Dichten $f_{X_i} = f_i$.

Beweis. Ad (i): Gemäß Satz 1.3 und Lemma 20 definiert

$$Q(A) := \int_A f_{X_1} \otimes \ldots \otimes f_{X_d}(x)\, dx, \qquad A \in \mathfrak{B}_d,$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}_d$. Speziell für $A := A_1 \times \cdots \times A_d$ mit $A_i :=]-\infty, b_i]$

$$\begin{aligned} P(\{X \in A\}) &= \prod_{i=1}^{d} P(\{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{d} \int_{A_i} f_{X_i}(x_i)\, dx_i \\ &= \int_{A_1} \cdots \int_{A_d} \prod_{i=1}^{d} f_{X_i}(x_i)\, dx_d \ldots dx_1 = Q(A). \end{aligned}$$

Satz IV.1.9.(i) zeigt $P_X = Q$.
Ad (ii): Für $A_1, \ldots, A_d \in \mathfrak{B}_1$ und $A := A_1 \times \cdots \times A_d$ gilt

$$P(\{X \in A\}) = \int_A f_X(x)\, dx = \int_{A_1} f_1(x_1)\, dx_1 \cdots \int_{A_d} f_d(x_d)\, dx_d.$$

Insbesondere

$$P(\{X_i \in A_i\}) = \int_{A_i} f_i(x_i)\, dx_i,$$

d.h. f_i ist Dichte von X_i, und weiter

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{d} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{d} P(\{X_i \in A_i\}).$$

□

Bemerkung 22. Satz 21 ermöglicht die Modellierung der „unabhängigen Hintereinanderausführung“ von Einzelexperimenten, deren Verteilungen Dichten besitzen.

Beispiel 23. Pfeiltreffer auf Dartscheibe, siehe Beispiel 18. Satz 21 zeigt, daß X_1, X_2 nicht unabhängig sind.

Definition 24. Ein d-dimensionaler Zufallsvektor X mit Dichte

$$f_X(x) = (2\pi)^{-d/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)$$

heißt *standard-normalverteilt* (in $\mathbb{R}^d$).

Beispiel 25. Die Dichte eines 2-dim. standard-normalverteilten Zufallsvektors ist in Abbildung V.5 dargestellt.

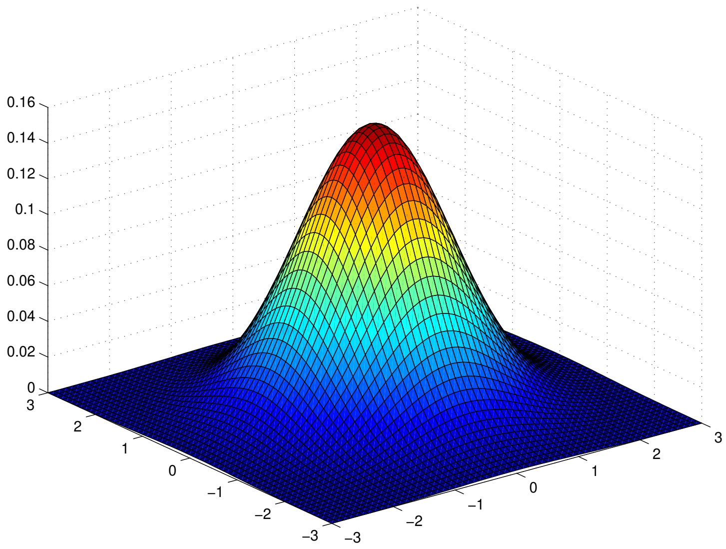

Abbildung V.5: Dichte eines 2-dim. standard-normalverteilten Zufallsvektors

.

Definitionen und Bezeichnungen

Additivität, 6
Arcussinus-Verteilung, 60

bedingte Wahrscheinlichkeit, 7
Bernoulli-Verteilung, 33
    symmetrisch, 44
Binomialverteilung, 35
Borel-Menge, 65

Dichte, *siehe* Wahrscheinlichkeitsdichte
direkte Simulation, 19

Ereignis, 1
Ereignisraum, 1
Ergebnis, 1
Ergebnisraum, 1
Exponentialverteilung, 75

geometrische Verteilung, 41
Gleichverteilung
    diskret, 4
    kontinuierlich, 19, 75

hypergeometrische Verteilung, 38

Indikatorfunktion, 11
Inversionsmethode, 25
Irrfahrt
    symmetrisch Bernoulli-, 44

Laplace-Annahme, 4
Lebesgue-Maß, 67

Mächtigkeit, 2
Median, 24
Monotonie, 6

Normalverteilung
    eindimensional, 77

paarweise disjunkte Mengen, 4
Poisson-Verteilung, 38
Potenzmenge, 2
Produktmaß, 32
Produktraum, 32

Quantil, 24

Randverteilung, 69

σ-Additivität, 4
σ-Algebra, 3
    Borelsch, 65
    erzeugt, 65
σ-Stetigkeit von oben, 6
σ-Stetigkeit von unten, 6
σ-Subadditivität, 6
Standard-Normalverteilung
    eindimensional, 77
    mehrdimensional, 81

Tensorprodukt, 80

Unabhängigkeit
    einer Folge von Ereignissen, 10
    einer Folge von Zufallsvariablen, 15
    paarweise, 11
    zweier Ereignisse, 10

Verteilung, 69
    absolutstetig, 75
    diskret, 33
    gemeinsam, 69
Verteilungsfunktion, 13
    empirisch, 19

Wahrscheinlichkeitsdichte, 74
Wahrscheinlichkeitsfunktion, 27
Wahrscheinlichkeitsmaß, 4
Wahrscheinlichkeitsraum, 4
    diskret, 27
Wahrscheinlichkeitsverteilung, 4

Zufallsvariable, 12
    absolutstetig verteilt, 75
    arcussinus-verteilt, 60
    Bernoulli-verteilt, 33
    binomialverteilt, 35
    diskret, 33
    exponentialverteilt, 75
    geometrisch verteilt, 41
    gleichverteilt, 19, 75
    hypergeometrisch verteilt, 38
    normalverteilt, 77
    Poisson-verteilt, 38
    Realisierung, 18
    standard-normalverteilt, 77
    symmetrisch Bernoulli-verteilt, 44
Zufallsvariablen
    identisch verteilt, 13, 15
    iid, 16
    Realisierung, 18
Zufallsvektor, 68
    absolutstetig verteilt, 75
    gleichverteilt, 75
    standard-normalverteilt, 81
Zufallsvektoren
    identisch verteilt, 69
Zufallszahlen, 20