Inhaltsverzeichnis

Kapitel V

Absolutstetige Modelle

Ist X eine diskrete Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, so gilt $P(\{X \in D\}) = 1$ für eine abzählbare Menge $D \subset \mathbb{R}$, und für alle $A \in \mathfrak{B}_1$ folgt

$$P(\{X \in A\}) = P(\{X \in A\} \cap \{X \in D\}) = \sum_{x \in A \cap D} P(\{X = x\}).$$

In diesem Kapitel untersuchen wir Zufallsvariablen, bei denen die Summation der Wahrscheinlichkeitsfunktion $x \mapsto P(\{X = x\})$ über $A \cap D$ durch die Integration einer geeigneten Funktion $x \mapsto f_X(x)$ über A ersetzt wird. Also

$$P(\{X \in A\}) = \int_A f_X(x)\, dx.$$

1 Wahrscheinlichkeitsdichten

Bemerkung 1. Integralbegriffe für Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:

(i) Lebesgue-Integral (Vorlesung Analysis IV), siehe auch Georgii (2007, p. 17).

(ii) Spezialfall: Uneigentliches Riemann-Integral (Walther, Analysis II, Springer-Verlag, 1990, §7.20).

(iii) Spezialfall: Für abgeschlossene Intervalle $B_i \subseteq \mathbb{R}$ und $B := B_1 \times \cdots \times B_d \subseteq \mathbb{R}^d$ sei $f|_B$ stetig. Setze $B^{(K)} := B \cap [-K, K]^d$. Falls $\sup_{K \in \mathbb{N}} \int_{B^{(K)}} |f(x)|\, dx < \infty$, so gilt

$$\int_B f(x)\, dx = \lim_{K \to \infty} \int_{B^{(K)}} f(x)\, dx.$$

Berechnung von $\int_{B^{(K)}} f(x)\, dx$ mit $B^{(K)} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ als iteriertes Integral

$$\int_{B^{(K)}} f(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_d}^{b_d} f(x_1, \ldots, x_d)\, dx_d \ldots dx_1.$$

Definition 2. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ heißt *Wahrscheinlichkeitsdichte*, kurz *Dichte*, falls f (Lebesgue)-integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = 1.$$

Satz 3. Jede Dichte f definiert durch

$$P(A) := \int_A f(x)\,dx, \qquad A \in \mathfrak{B}_d,$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}_d$.

Beweis. Klar: $P \geq 0$ und $P(\mathbb{R}^d) = 1$.
Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}_d$ p.d. und $A := \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(x) \cdot f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^\infty 1_{A_i}(x) \cdot f(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A_i}(x) \cdot f(x)\,dx = \sum_{i=1}^\infty P(A_i) \end{aligned}$$

aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz. □

Vgl. Satz 3 mit Satz III.1.3 über Wahrscheinlichkeitsfunktionen.
Nun zur Eindeutigkeit von Dichten.

Lemma 4. Seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall A \in \mathfrak{B}_d : \displaystyle\int_A f(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx,$

(ii) $\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$

Beweis. Folgt aus Meintrup, Schäffler (2005, Satz 2.15). □

Ausblick: singuläre Verteilungen.

2 Absolutstetig verteilte Zufallsvariablen

Satz 1.3 und Bemerkung IV.3.5 erlauben die Modellierung von Verteilungen durch Vorgabe ihrer Dichten. Ein erstes Beispiel haben wir mit Definition III.5.22 kennengelernt.

Im folgenden sei $d \in \mathbb{N}$ und $X = (X_1, \ldots, X_d)$ bezeichne einen d-dimensionaler Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Definition 1. X heißt *absolutstetig verteilt*, falls P_X eine Dichte besitzt. Diese wird ggf. mit f_X bezeichnet.

Definition 2. Sei $B \in \mathfrak{B}_d$ mit Lebesgue-Maß (Länge, Flächeninhalt, Volumen) $\lambda_d(B) \in]0, \infty[$. Ein Zufallsvektor X mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda_d(B)} \cdot 1_B(x)$$

heißt *gleichverteilt* auf B. Bez.: $X \sim \mathbf{U}(B)$.

Bemerkung 3. Für $X \sim \mathbf{U}(B)$ und $A \in \mathfrak{B}_d$ gilt

$$P_X(A) = \frac{1}{\lambda_d(B)} \cdot \int_A 1_B(x)\, dx = \frac{\lambda_d(A \cap B)}{\lambda_d(B)}.$$

Beispiel 4. Dichte und Verteilungsfunktion von $X \sim \mathbf{U}([a, b])$ mit $a < b$ sind gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } x \in [a, b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } x \in [a, b] \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 5. $X \sim \mathbf{U}(B)$ zur Modellierung von Pfeiltreffer auf Dartscheibe, Glücksrad. Wichtige Anwendung der Gleichverteilung: Zufallszahlen und stochastische Simulation, siehe Kapitel II.

Definition 6. Eine Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda x), & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\lambda > 0$ heißt *exponentialverteilt* mit Parameter λ. Bez.: $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$.

Bemerkung 7. Für $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ und $x > 0$ gilt

$$F_X(x) = \lambda \cdot \int_0^x \exp(-\lambda y)\, dy = 1 - \exp(-\lambda x)$$

Klar: $F_X(x) = 0$, falls $x \leq 0$.

Beispiel 8. Dichten und Verteilungsfunktionen exponentialverteilter Zufallsvariablen sind in den Abbildungenen V.1 und V.2 dargestellt.

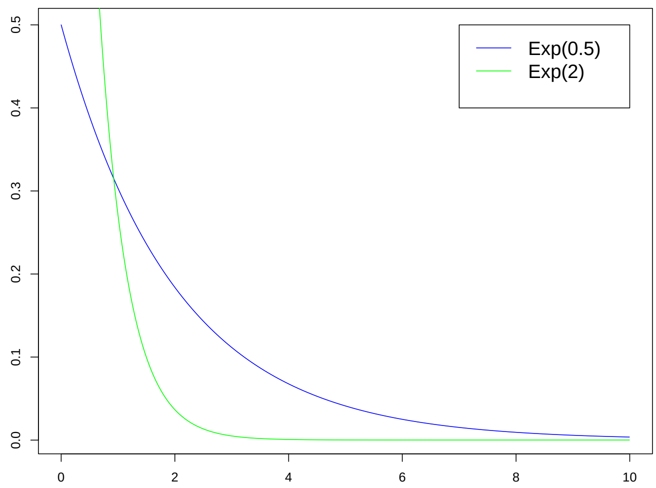

Abbildung V.1: Dichten exponentialverteilter Zufallsvariablen

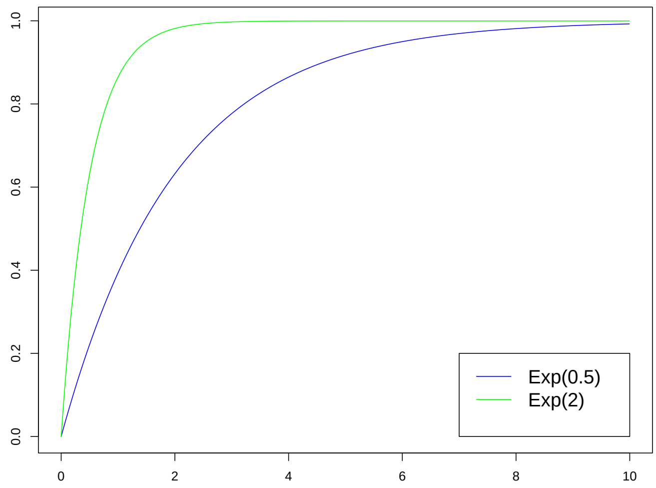

Abbildung V.2: Verteilungsfunktionen exponentialverteilter Zufallsvariablen

Nun: Charakterisierung der Exponentialverteilung durch ihre Gedächtnislosigkeit.

Satz 9. Für eine Zufallsvariable X mit

- $P(\{X > 0\}) = 1$ und
- $\forall t > 0 : P(\{X > t\}) > 0$

sind äquivalent

(i) $\exists \lambda > 0 : \ X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$,

(ii) $\forall s, t > 0 : P(\{X > t + s\} \mid \{X > t\}) = P(\{X > s\})$.

Beweis. Siehe $\boxed{\text{ÜBUNG}}$ und vgl. $\boxed{\text{ÜBUNG}}$. □

Beispiel 10. $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$ zur Modellierung von Lebensdauern, Wartezeiten, radioaktivem Zerfall. Beim radioaktiven Zerfall bezeichne X den Zerfallszeitpunkt. Die Halbwertszeit $h > 0$ ist definiert durch

$$P(\{X \leq h\}) = \frac{1}{2}.$$

Man erhält

$$h = \ln(2)/\lambda.$$

Siehe auch Beispiel VII.3.8.

Lemma 11. Für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sqrt{2\pi\sigma^2}.$$

Beweis. OBdA $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ (Substitutionsregel). Es gilt

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) d(x,y) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \cdot r \, dr \, d\varphi \\
&= 2\pi \cdot \left(-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right) \Big|_0^{\infty} = 2\pi.
\end{aligned}$$

□

Definition 12. Eine Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ heißt *normalverteilt* mit Parametern μ und σ^2. Bez.: $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$. *Standard-Normalverteilung* als Spezialfall: $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

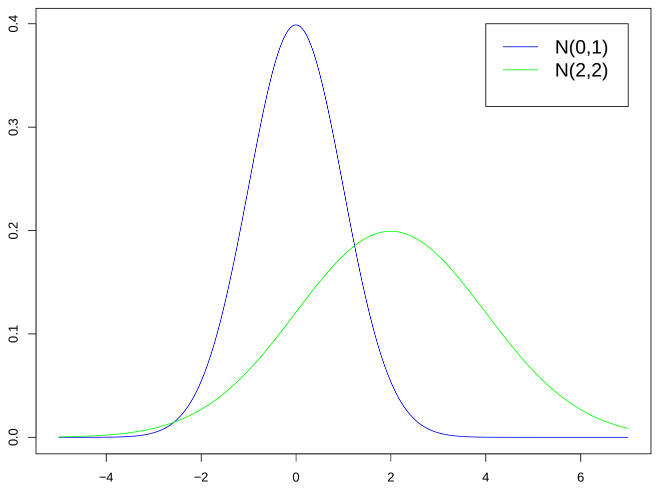

Abbildung V.3: Dichten normalverteilter Zufallsvariablen

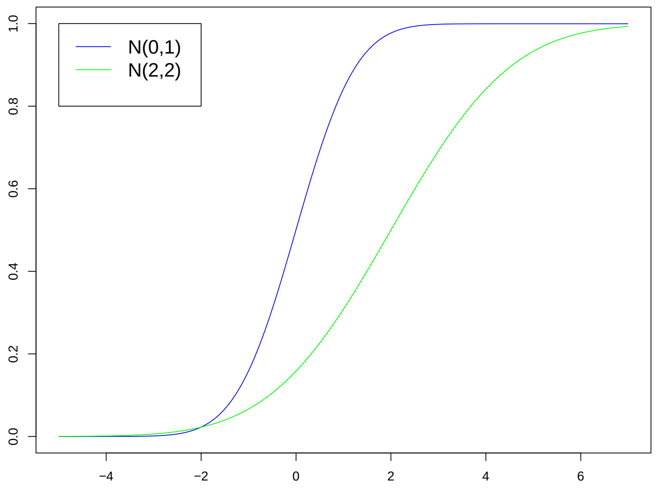

Abbildung V.4: Verteilungsfunktionen normalverteilter Zufallsvariablen

Beispiel 13. Dichten und Verteilungsfunktionen normalverteilter Zufallsvariablen sind in den Abbildungenen V.3 und V.4 dargestellt.

Beispiel 14. $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ zur Modellierung von (Meß)Fehlern. Siehe Abschnitt VII.3 zur zentralen Rolle der Normalverteilung in der Stochastik.

Bemerkung 15. Es gibt keine explizite Formel für die Verteilungsfunktion F_X, falls $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$. Bez.: $\Phi = F_X$, falls $X \sim \mathbf{N}(0, 1)$, also

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Zur Berechnung von Φ und entsprechender Quantile: Numerik, Tabellen, Plots.

Nun: der Zusammenhang zwischen Dichten und Verteilungsfunktionen.

Satz 16. Für eine Zufallsvariable X sind äquivalent

(i) F_X stetig differenzierbar,

(ii) X absolutstetig verteilt mit stetiger Dichte f_X.

Gilt (i) oder (ii), so folgt $F'_X = f_X$.

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} F'_X(u)\, du.$$

Gem. Satz IV.1.9 stimmt P_X mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Dichte F'_X überein.
"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. □

Ausblick: absolutstetige Funktionen.
Nun speziell: mehrdimensionale Dichten. Analytisches Hilfsmittel: der Satz von Fubini.

Lemma 17. Falls f_X Dichte von P_X ist, so besitzt P_{X_i} die Dichte

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_X(\overline{x}_1, x_i, \overline{x}_2)\, d(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$$

mit

$$\overline{x}_1 = (x_1, \ldots, x_{i-1}), \qquad \overline{x}_2 = (x_{i+1}, \ldots, x_d).$$

Beweis. Für $A_i \in \mathfrak{B}_1$ sei $A := \mathbb{R}^{i-1} \times A_i \times \mathbb{R}^{d-i}$. Dann

$$\begin{aligned} P(\{X_i \in A_i\}) = P(\{X \in A\}) &= \int_A f_X(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \int_{A_i} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1, \dots, x_d)\, dx_d \dots dx_1 \\ &= \int_{A_i} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_X(\overline{x}_1, x_i, \overline{x}_2)\, d(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}_{=:g(x_i)}\, dx_i, \end{aligned}$$

und g ist eine Dichte. □

Beispiel 18. Pfeiltreffer auf Dartscheibe. Hier

$$f_X(x_1, x_2) := \frac{1}{\pi r^2} \cdot 1_K(x_1, x_2)$$

mit

$$K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le r^2\}.$$

Also für $x_1 \in [-r, r]$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1, x_2)\, dx_2 = \frac{1}{\pi r^2} \cdot \int_{-\sqrt{r^2 - x_1^2}}^{\sqrt{r^2 - x_1^2}} 1\, dx_2 = \frac{2}{\pi r^2} \cdot \sqrt{r^2 - x_1^2}$$

sowie $f_{X_1}(x_1) = 0$, falls $|x_1| > r$. Klar

$$f_{X_1} = f_{X_2}.$$

Definition 19. Das *Tensorprodukt* $f_1 \otimes \ldots \otimes f_d : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ von Abbildungen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_d(x) := f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_d(x_d).$$

Vgl. Abschnitt III.3.

Lemma 20. Falls $f_1, \dots, f_d$ Dichten auf $\mathbb{R}$, so ist $f_1 \otimes \ldots \otimes f_d$ Dichte auf $\mathbb{R}^d$.

Beweis. Klar. Vgl. Lemma III.3.2. □

Satz 21.

(i) Falls $X_1, \dots, X_d$ unabhängig mit Dichten f_{X_i}, so besitzt X die Dichte

$$f_X = f_{X_1} \otimes \ldots \otimes f_{X_d}.$$

(ii) Falls X die Dichte

$$f_X = f_1 \otimes \ldots \otimes f_d$$

mit eindimensionalen Dichten f_i besitzt, so sind $X_1, \dots, X_d$ unabhängig mit Dichten $f_{X_i} = f_i$.

Beweis. Ad (i): Gemäß Satz 1.3 und Lemma 20 definiert

$$Q(A) := \int_A f_{X_1} \otimes \ldots \otimes f_{X_d}(x)\, dx, \qquad A \in \mathfrak{B}_d,$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}_d$. Speziell für $A := A_1 \times \cdots \times A_d$ mit $A_i :=]-\infty, b_i]$

$$\begin{aligned} P(\{X \in A\}) &= \prod_{i=1}^d P(\{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^d \int_{A_i} f_{X_i}(x_i)\, dx_i \\ &= \int_{A_1} \cdots \int_{A_d} \prod_{i=1}^d f_{X_i}(x_i)\, dx_d \ldots dx_1 = Q(A). \end{aligned}$$

Satz IV.1.9.(i) zeigt $P_X = Q$.
Ad (ii): Für $A_1, \ldots, A_d \in \mathfrak{B}_1$ und $A := A_1 \times \cdots \times A_d$ gilt

$$P(\{X \in A\}) = \int_A f_X(x)\, dx = \int_{A_1} f_1(x_1)\, dx_1 \cdots \int_{A_d} f_d(x_d)\, dx_d.$$

Insbesondere

$$P(\{X_i \in A_i\}) = \int_{A_i} f_i(x_i)\, dx_i,$$

d.h. f_i ist Dichte von X_i, und weiter

$$P\left(\bigcap_{i=1}^d \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^d P(\{X_i \in A_i\}).$$

□

Bemerkung 22. Satz 21 ermöglicht die Modellierung der „unabhängigen Hintereinanderausführung" von Einzelexperimenten, deren Verteilungen Dichten besitzen.

Beispiel 23. Pfeiltreffer auf Dartscheibe, siehe Beispiel 18. Satz 21 zeigt, daß X_1, X_2 nicht unabhängig sind.

Definition 24. Ein d-dimensionaler Zufallsvektor X mit Dichte

$$f_X(x) = (2\pi)^{-d/2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2\right)$$

heißt *standard-normalverteilt* (in $\mathbb{R}^d$).

Beispiel 25. Die Dichte eines 2-dim. standard-normalverteilten Zufallsvektors ist in Abbildung V.5 dargestellt.

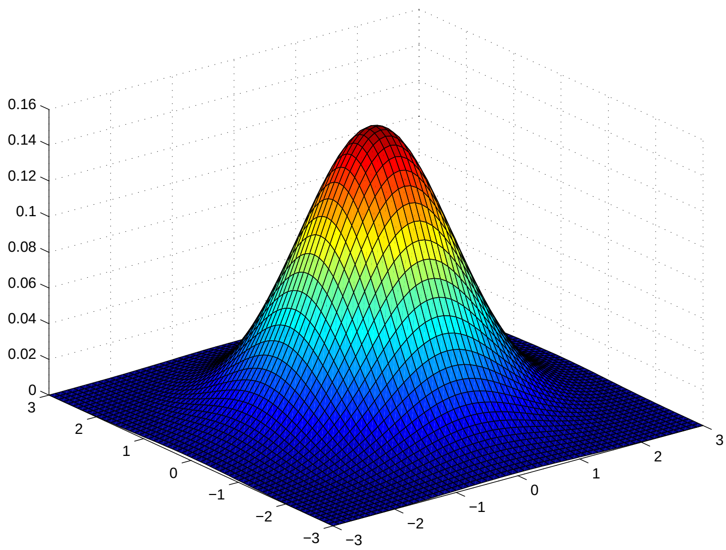

Abbildung V.5: Dichte eines 2-dim. standard-normalverteilten Zufallsvektors

.

Definitionen und Bezeichnungen