Inhaltsverzeichnis

Kapitel IV

Grundlagen allgemeiner Modelle

Bisher in erster Linie studiert: diskrete Wahrscheinlichkeitsräume und diskrete Zufallsvariablen. Dieser Rahmen erlaubt beispielsweise nicht

- die Beschreibung des unendlich-oft wiederholten Münzwurf, siehe Bemerkung III.4.18,
- die Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und reellwertigen Zufallsvariablen X mit

  $$\forall x \in \mathbb{R}: \; P(\{X = x\}) = 0.$$

  Beispiel: Wartezeit, Koordinaten von Pfeiltreffer auf Dartscheibe, fehlerhafter Meßwert, kontinuierliches „Glücksrad", usw.

Darüber hinaus ist die Menge der diskreten Verteilungen nicht abgeschlossen bzgl. Verteilungskonvergenz, siehe Bemerkung III.5.23 und Abschnitt VII.3.

1 Die Borelsche σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$

Beispiel 1. Kontinuierliches „Glücksrad". Versuch einer stochastischen Modellierung durch

(i) $\Omega := [0, 1[$ (Kreislinie der Länge 1),

(ii) $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$,

(iii) ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $P([a, b]) = b - a$ für $0 \leq a < b < 1$
- $P(A) = P(B)$, falls B aus A durch „Rotation" hervorgeht.

Definiere für $\omega, \omega' \in [0,1[$ und $A \subseteq [0,1[$

$$\begin{aligned} \omega \oplus \omega' &:= \omega + \omega' - \lfloor \omega + \omega' \rfloor, \\ \omega \oplus A &:= \{\omega \oplus a : a \in A\}. \end{aligned}$$

Frage: Existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathfrak{P}([0,1[)$ mit

$$\forall A \subseteq [0,1[\ \forall \omega \in [0,1[: P(\omega \oplus A) = P(A)?$$

Antwort: Nein.

Beweis. Sei $Q := \mathbb{Q} \cap \Omega$. Betrachte die Äquivalenzrelation

$$\omega \sim \omega' :\Leftrightarrow \exists\, q \in Q : \omega' = \omega \oplus q$$

auf Ω und die zugehörigen Äquivalenzklassen

$$[r] = \{\omega \in \Omega : \omega \sim r\}.$$

Wähle ein Repräsentantensystem $R \subseteq \Omega$ (Auswahlaxiom), d.h.

$$\forall \omega \in \Omega \exists_1\, r \in R : \omega \in [r].$$

Es gilt für $q_1, q_2 \in Q$ mit $q_1 \neq q_2$

$$(q_1 \oplus R) \cap (q_2 \oplus R) = \emptyset.$$

Schließlich erfüllt P mit obigen Eigenschaften

$$1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{q \in Q} q \oplus R) = \sum_{q \in Q} P(q \oplus R) = \sum_{q \in Q} P(R).$$

Widerspruch. $\square$

Folglich gibt es keine „Gleichverteilung“ auf $\mathfrak{P}([0,1[)$. Ausweg: betrachte eine kleinere σ-Algebra.

Im folgenden sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ sowie

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &:= \{\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega) : \mathfrak{A}\, \sigma\text{-Algebra},\ \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{A}\}, \\ \sigma(\mathfrak{E}) &:= \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathbb{A}} \mathfrak{A} = \{A \subseteq \Omega : \forall \mathfrak{A} \in \mathbb{A} :\ A \in \mathfrak{A}\}. \end{aligned}$$

Beachte, daß $\mathfrak{P}(\Omega) \in \mathbb{A}$.

Lemma 2. $\sigma(\mathfrak{E})$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathfrak{E}$ umfaßt, d.h.

(i) $\sigma(\mathfrak{E})$ ist σ-Algebra,

(ii) $\mathfrak{E} \subseteq \sigma(\mathfrak{E})$,

(iii) $\forall \mathfrak{A} \in \mathbb{A} : \sigma(\mathfrak{E}) \subseteq \mathfrak{A}$.

Beweis. Ad (i), exemplarisch der Nachweis einer der Eigenschaften: Gelte $A_1, A_2, \ldots \in \sigma(\mathfrak{E})$. Dann

$$\forall \mathfrak{A} \in \mathbb{A} : \; A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A},$$

so daß

$$\forall \mathfrak{A} \in \mathbb{A} : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A},$$

da $\mathfrak{A} \in \mathbb{A}$ σ-Algebra. Dies zeigt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathfrak{E})$.
Ad (ii): Nach Definition gilt $\forall \mathfrak{A} \in \mathbb{A} : \; \mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{A}$, d.h.

$$\forall \mathfrak{A} \in \mathbb{A} \forall E \in \mathfrak{E} : \; E \in \mathfrak{A}.$$

Somit

$$\forall E \in \mathfrak{E} : \; E \in \sigma(\mathfrak{E}).$$

Ad (iii): Klar nach Definition. □

Definition 3. $\sigma(\mathfrak{E})$ heißt die von $\mathfrak{E}$ *erzeugte σ-Algebra* (in Ω).
Vgl. erzeugter Untervektorraum.

Beispiel 4. Für $\Omega = \{1,2,3,4\}$ und $\mathfrak{E} = \{\{1,2,3\},\{2\}\}$ gilt

$$\begin{aligned}\sigma(\mathfrak{E}) &= \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \Omega\} \\ &= \{A \subseteq \Omega : \{1,3\} \subseteq A \text{ oder } \{1,3\} \cap A = \emptyset\}.\end{aligned}$$

Definition 5. Für $d \in \mathbb{N}$ und

$$\mathfrak{O}_d := \{O \subseteq \mathbb{R}^d : O \text{ offen}\}$$

heißt

$$\mathfrak{B}_d := \sigma(\mathfrak{O}_d)$$

die *Borelsche σ-Algebra* in $\mathbb{R}^d$. Die Elemente $B \in \mathfrak{B}_d$ heißen *Borel-Mengen* (in $\mathbb{R}^d$).

Bemerkung 6.

(i) $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen $\Rightarrow A \in \mathfrak{B}_d$, da A^c offen,

(ii) $\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{B}_1$.

Lemma 7.

$$A_1, \ldots, A_d \in \mathfrak{B}_1 \Rightarrow A_1 \times \cdots \times A_d \in \mathfrak{B}_d.$$

Beweis. Siehe Irle (2001, p. 151). Stichwort: Produkt-σ-Algebra. □

Bemerkung 8. Es gilt $\mathfrak{B}_d \subsetneq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$, siehe Bemerkung 2.5. Uns werden in dieser Vorlesung jedoch keine Mengen aus $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathfrak{B}_d$ begegnen. Siehe dazu auch Krengel (2000, p. 130).

Satz 9.

(i) Gilt

$$\forall x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R} : P(]-\infty, x_1] \times \cdots \times]-\infty, x_d]) = Q(]-\infty, x_1] \times \cdots \times]-\infty, x_d])$$

für Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q auf $\mathfrak{B}_d$, so folgt

$$P = Q.$$

(ii) Sind $P_1, \ldots, P_d$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{B}_d$, so existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathfrak{B}_d$ mit

$$\forall x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R} : P(]-\infty, x_1] \times \cdots \times]-\infty, x_d]) = \prod_{i=1}^{d} P_i(]-\infty, x_i]).$$

Beweis. Ad (i): Siehe Irle (2001, p. 151) oder Georgii (2007, p. 16). Stichwort: durchschnittstabiler Erzeuger.

Ad (ii): Siehe Irle (2001, p. 168). Stichwort: Produkt-Maß. □

Bemerkung 10. Satz 9.(i) sichert, daß das Wahrscheinlichkeitsmaß P gemäß Satz 9.(ii) eindeutig bestimmt ist.

2 Das d-dimensionale Lebesgue-Maß

Satz 1. Es existiert genau eine σ-additive Abbildung $\lambda_d : \mathfrak{B}_d \to [0, \infty]$ mit

$$\forall a_i \leq b_i : \ \lambda_d([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i).$$

Diese erfüllt

$$\lambda_d(a + Q(A)) = \lambda_d(A)$$

für alle $a \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathfrak{B}_d$ und alle orthogonalen Abbildungen $Q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

Beweis. Siehe Meintrup, Schäffler (2005, Anhang A.1). □

Definition 2. λ_d gemäß Satz 1 heißt *Lebesgue-Maß* auf $\mathfrak{B}_d$ oder d-dimensionales Lebesgue-Maß.

Bemerkung 3. Für das Lebesgue-Maß gelten die Sätze I.1.16 (i)–(iii) und I.1.17 (i), (ii) entsprechend.

Beispiel 4. Modellierung des kontinuierlichen „Glücksrad“ durch

(i) $\Omega := [0, 1[$,

(ii) $\mathfrak{A} := \{A \in \mathfrak{B}_1 : A \subseteq \Omega\}$,

(iii) $P(A) := \lambda_1(A)$.

Es gilt $P(\Omega) = 1$, und $\mathfrak{A}$ ist eine σ-Algebra in Ω, so daß $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist. Für $A \in \mathfrak{A}$ und $\omega \in \Omega$ setzen wir

$$A_1 := A \cap [0, 1-\omega[\in \mathfrak{A}, \qquad A_2 := A \cap [1-\omega, 1[\in \mathfrak{A}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} P(\omega \oplus A) &= P(\omega \oplus A_1) + P(\omega \oplus A_2) = P(\omega + A_1) + P(\omega + A_2 - 1) \\ &= P(A_1) + P(A_2) = P(A). \end{aligned}$$

Bemerkung 5. Aus den Beispielen 1.1 und 4 ergibt sich $\mathfrak{B}_1 \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

Bemerkung 6. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum aus Beispiel 4 existiert eine Folge $X_1, X_2, \dots$ von iid Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$, siehe auch Bemerkung III.4.18 Im Spezialfall $p = 1/2$ leistet

$$X_n(\omega) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} 1_{A_i}(\omega)$$

mit

$$A_i = [(2i-1)/2^n, 2i/2^n[$$

das Verlangte, siehe $\boxed{\text{Übung}}$. Bemerkt sei, daß $X_n(\omega)$ die n-te Stelle der Binärentwicklung von ω ist.

3 Verteilungen

Im folgenden betrachten wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und Abbildungen $X_1, \ldots, X_d : \Omega \to \mathbb{R}$. Setze

$$X := (X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d.$$

Lemma 1. Äquivalent sind

(i) $X_1, \ldots, X_d$ sind Zufallsvariablen,

(ii) $\forall A \in \mathfrak{B}_d : \ \{X \in A\} \in \mathfrak{A}$.

Beweis. „(ii) $\Rightarrow$ (i)“

$$\{X_i \leq c_i\} = \{X_i \leq c_i\} \cap \bigcap_{j \neq i} \{X_j \in \mathbb{R}\} = \{X \in A\}$$

für $A = \mathbb{R}^{i-1} \times]-\infty, c_i] \times \mathbb{R}^{d-i}$. Da A abgeschlossen, folgt $A \in \mathfrak{B}_d$ und wg. (ii) auch $\{X_i \leq c_i\} \in \mathfrak{A}$.
„(i) $\Rightarrow$ (ii)“ Siehe Irle (2001, p. 151). Stichwort: Produkt-Meßbarkeit. $\square$

Vgl. Lemma 1 mit Lemma I.3.8 im Fall $d = 1$. Vgl. Begriffe der Meßbarkeit und Stetigkeit von Abbildungen.

Definition 2. X heißt (d-dimensionaler) *Zufallsvektor*, falls eine der beiden Eigenschaften aus Lemma 1 erfüllt ist.

Ein Zufallsvektor mit $d > 1$ dient zur gemeinsamen Modellierung mehrerer Aspekte eines Zufallsexperimentes. Siehe bereits Beispiel I.3.1.
Fortan sei $d \in \mathbb{N}$ und $X = (X_1, \ldots, X_d)$ sei ein Zufallsvektor.

Satz 3.

$$P_X(A) := P(\{X \in A\}), \qquad A \in \mathfrak{B}_d,$$

definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}_d$.

Beweis. Klar: $P_X \geq 0$ und $P_X(\mathbb{R}^d) = P(\{X \in \mathbb{R}^d\}) = P(\Omega) = 1$.
Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}_d$ p.d. und $A := \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ gilt

$$P_X(A) = P\Big(\Big\{X \in \bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big\}\Big) = P\Big(\bigcup_{i=1}^\infty \underbrace{\{X \in A_i\}}_{\in \mathfrak{A} \text{ p.d.}}\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^\infty P(\{X \in A_i\}) = \sum_{i=1}^\infty P_X(A_i).$$

$\square$

Definition 4. P_X heißt *Verteilung* von X. Im Falle $d > 1$ heißt P_X auch *gemeinsame Verteilung* der Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_d$, und $P_{X_1}, \dots, P_{X_d}$ heißen *(eindim.) Randverteilungen* von X.

Wir können somit von Binomial-Verteilungen, geometrischen Verteilungen etc. als Wahrscheinlichkeitsmaßen sprechen.

Bemerkung 5. Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathfrak{B}_d$ ist Verteilung eines Zufallsvektors: betrachte $X(\omega) := \omega$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d, P)$.

Satz 6. Für Zufallsvariablen X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und X' auf $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ sind äquivalent

i) X, X' identisch verteilt,

ii) $P_X = P'_{X'}$.

Beweis. „(ii) $\Rightarrow$ (i)“: klar. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Satz 1.9. $\square$

Definition 7. d-dimensionale Zufallsvektoren X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und X' auf $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ heißen *identisch verteilt*, falls $P_X = P'_{X'}$.

Viele Fragestellungen der Stochastik betreffen nicht die konkrete Gestalt des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes und der betrachteten Zufallsvariablen sondern nur ihre gemeinsame Verteilung. Beispiel: Unabhängigkeit, siehe Satz 10.

Beispiel 8. Sei P die Gleichverteilung auf $\Omega := \{0,1\}^2$ (zweimaliger Münzwurf) und sei $X_i(\omega) := \omega_i$. Also sind X_1 und X_2 diskret, und es gilt $P(\{X = x\}) = 1/4$ für $x \in D := \Omega$.
Bestimmung der gemeinsamen Verteilung von X_1 und X_2: Für $A \in \mathfrak{B}_2$ gilt

$$P_X(A) = P(\{X \in A\} \cap \{X \in D\}) = \sum_{x \in A \cap D} P(\{X = x\}) = |A \cap D|/4.$$

Bestimmung der Randverteilungen: Für $B \in \mathfrak{B}_1$ gilt

$$P_{X_1}(B) = P(\{X \in B \times \mathbb{R}\}) = |(B \times \mathbb{R}) \cap D|/4 = |B \cap \{0,1\}|/2.$$

Analog zeigt man $P_{X_2}(B) = |B \cap \{0,1\}|/2$.
Insbesondere gilt $P_{X_1} = P_{X_2}$, obwohl $X_1 \neq X_2$.
Jetzt betrachten wir $X'_1(\omega) := \omega_1$ und $X'_2(\omega) := \omega_1$. Wiederum sind X'_1 und X'_2 diskret, und es gilt $P(\{X' = x\}) = P(\{X_1 = x_1\}) = 1/2$ für $x \in D' := \{(0,0),(1,1)\}$.
Bestimmung der gemeinsamen Verteilung: Für $A \in \mathfrak{B}_2$ gilt

$$P_{X'}(A) = P(\{X' \in A\} \cap \{X' \in D'\}) = \sum_{x \in A \cap D'} P(\{X = x\}) = |A \cap D'|/2.$$

Also gilt $P_X \neq P_{X'}$.
Für die Randverteilungen gilt

$$P_{X_1'} = P_{X_2'} = P_{X_1} = P_{X_2}.$$

Dies zeigt, daß die gemeinsame Verteilung durch die eindimensionalen Randverteilungen im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist. Siehe jedoch Bemerkung 11.(i).

Beispiel 9. Sei P die Gleichverteilung auf $\Omega := \{1, \dots, 6\}^2$ (zweimaliges Würfeln). Setze

$$X_1(\omega) := \omega_1, \qquad X_2(\omega) := \omega_1 + \omega_2.$$

Für

$$D := \{x \in \{1, \dots, 6\} \times \{2, \dots, 12\} : 1 \leq x_2 - x_1 \leq 6\}$$

gilt $P(\{X \in D\}) = 1$ sowie $P(\{X = x\}) = 1/36$ für alle $x \in D$. Also

$$P_X(A) = \sum_{x \in A \cap D} P(\{X = x\}) = \frac{1}{36} \cdot |A \cap D|.$$

Satz 10. $(X_1, \dots, X_d)$ genau dann unabhängig, wenn

$$\forall A_1, \dots, A_d \in \mathfrak{B}_1 : \quad \underbrace{P\Big(\bigcap_{i=1}^d \{X_i \in A_i\}\Big)}_{=P_X(A_1 \times \cdots \times A_d)} = \prod_{i=1}^d \underbrace{P(\{X_i \in A_i\})}_{=P_{X_i}(A_i)}.$$

Kurz: die gemeinsame Verteilung ist das Produkt der Randverteilungen.

Beweis. „$\Leftarrow$" Klar. „$\Rightarrow$" Gemäß Satz 1.9.(ii) wird durch

$$Q(]-\infty, x_1] \times \cdots \times]-\infty, x_d]) = \prod_{i=1}^d P_{X_i}(]-\infty, x_i])$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathfrak{B}_d$ definiert. Satz 1.9.(i) und die Voraussetzung sichern $Q = P_X$.

Wir geben einen elementaren Beweis unter der zusätzlichen Annahme, daß $X_1, \dots, X_d$ diskret. Wähle abzählbare Menge $D \subset \mathbb{R}$ mit

$$P(\{X \in D^d\}) = P\Big(\bigcap_{i=1}^d \{X_i \in D\}\Big) = 1.$$

Für $A = A_1 \times \cdots \times A_d$ folgt mit Satz I.3.15

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{i=1}^d \{X_i \in A_i\}\Big) &= P(\{X \in A\}) = \sum_{x \in A \cap D^d} P(\{X = x\}) \\ &= \sum_{x_1 \in A_1 \cap D} \cdots \sum_{x_d \in A_d \cap D} \prod_{i=1}^d P(\{X_i = x_i\}) = \prod_{i=1}^d P(\{X_i \in A_i\}). \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 11.

(i) Satz I.3.15 enthält eine Teilaussage von Satz 10.

(ii) Sind $X_1, \dots, X_d$ unabhängig, so ist die gemeinsame Verteilung P_X eindeutig durch die Randverteilungen $P_{X_1}, \dots, P_{X_d}$ bestimmt, siehe Beweis von Satz 10. Vgl. Modellierung in Kapitel III.

(iii) Diskrete Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_d$ sind genau dann unabhängig, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \; P(\{X = x\}) = \prod_{i=1}^{d} P(\{X_i = x_i\}).$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Siehe Satz I.3.15 bzw. Satz 10. „$\Leftarrow$“ Siehe Beweis von Satz 10.

Definitionen und Bezeichnungen