# Inhaltsverzeichnis

folgt

$$P(\{X = \alpha\}) = 0.$$

Die Mengen $\{X = \alpha\}$ mit $\alpha \in S$ sind p.d. Ist $\Omega$ abzählbar, so gilt

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in S_0} \{X = \alpha\}$$

mit einer abzählbaren Menge $S_0 \subset S$. Damit ergibt sich der Widerspruch

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\alpha \in S_0} P(\{X = \alpha\}) = 0.$$

# 5 Die symmetrische Bernoulli-Irrfahrt

**Definition 1.** $X$ heißt *symmetrisch Bernoulli-verteilt*, falls

$$P(\{X = 1\}) = P(\{X = -1\}) = 1/2.$$

Bez.: $X \sim \mathbf{SB}$.

Im folgenden seien $Y_1, \ldots, Y_T$ iid mit $Y_1 \sim \mathbf{SB}$. Der Einfachheit halber gelte $Y_j(\Omega) = \{-1, 1\}$ für alle $j \in \{1, \ldots, T\}$. Wir setzen $S_0 := 0$ und

$$S_t := \sum_{j=1}^{t} Y_j = S_{t-1} + Y_t$$

für $t \in \{1, \ldots, T\}$.

**Definition 2.** $(S_t)_{t \in \{0,\ldots,T\}}$ heißt *symmetrische Bernoulli-Irrfahrt* (mit Zeithorizont $T$).

Im folgenden $(S_t)_{t \in \{0,\ldots,T\}}$ wie oben.
$(S_t)_{t \in \{0,\ldots,T\}}$ ist das einfachste Beispiel eines stochastischen Prozesses zur Modellierung zeitabhängiger zufälliger Phänomene. Anwendungen z. Bsp.

- Physik, $S_t$ eine Koordinate der Position eines Teilchen nach $t$ Kollisionen,
- faires Spiel zweier Spieler I und II, $S_t$ Stand aus Sicht von I nach $t$ Runden, siehe Beispiel II.1.3.

Ausblick: Irrfahrten auf Gruppen. Finanzmathematik: $]0, \infty[$ mit Multiplikation, Kartenmischen: symmetrische Gruppe mit Komposition.
In den Abbildungen III.11–III.13 zeigen wir je eine Simulation der Irrfahrt für $T = 50, 100, 1000$. Siehe Beispiel II.3.7 zur Simulation der Zufallsvariablen $Y_t$.
Nun: Gedächtnislosigkeit der Irrfahrt (Markov-Eigenschaft), siehe auch Georgii (2007, Kap. 6) und Krengel (2000, Kap. 15).

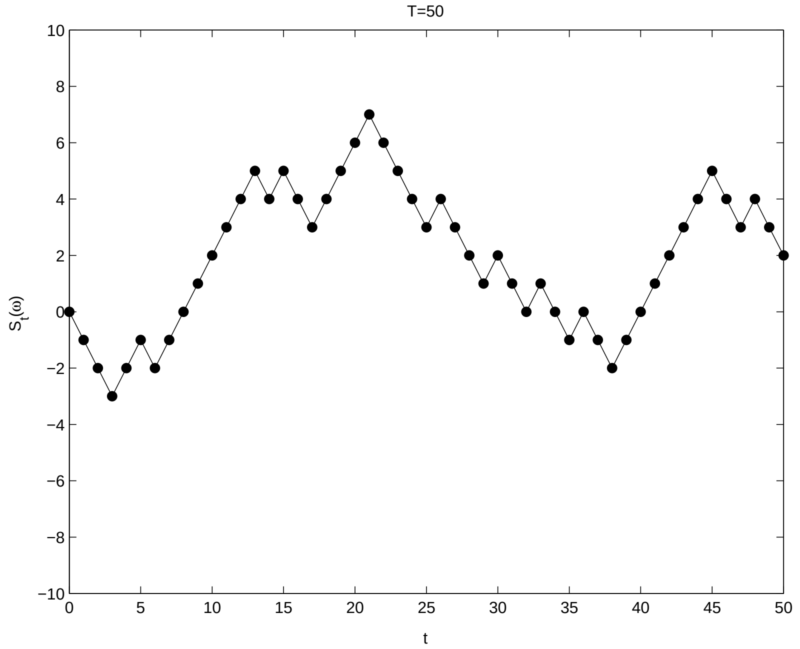


Abbildung III.11: $T = 50$, end=2, max=7, fueh=36

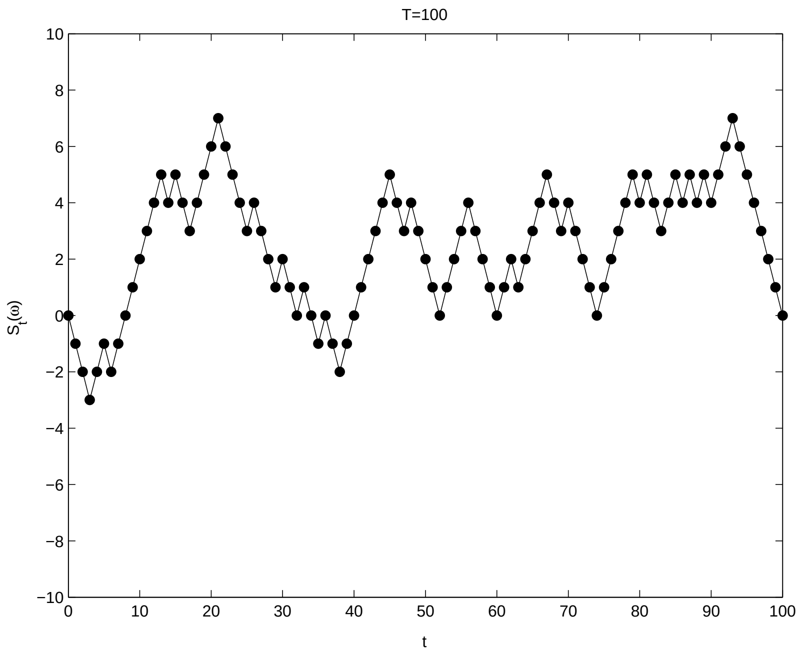


Abbildung III.12: $T = 100$, end=0, max=7, fueh=86

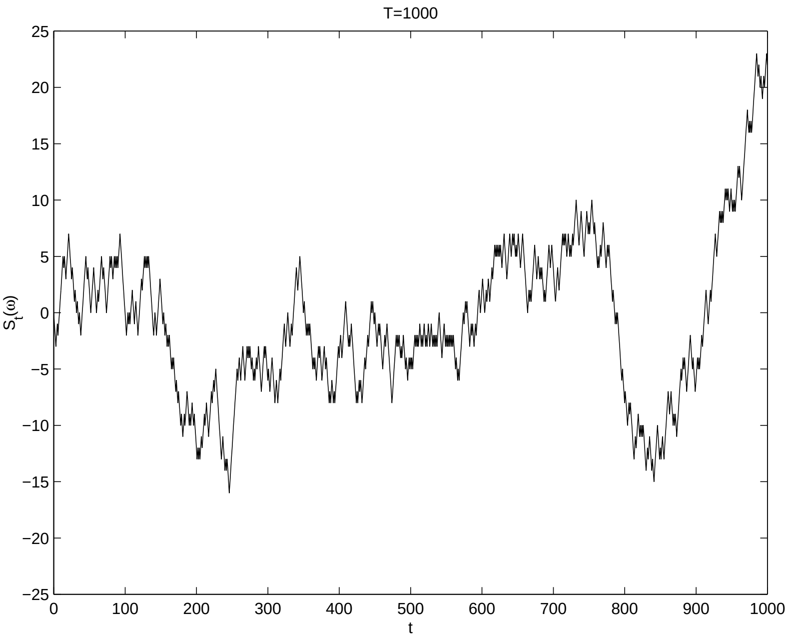


Abbildung III.13: $T = 1000$, end=22, max=23, fueh=420

**Lemma 3.** Für $t \in \{1, \dots, T-1\}$, $A \subseteq \{-1,1\}^t$ und $B \subseteq \{-1,1\}^{T-t}$ gilt

$$\begin{aligned} &P(\{(Y_1, \dots, Y_t) \in A\} \cap \{(Y_{t+1}, \dots, Y_T) \in B\}) \\ &\quad = P(\{(Y_1, \dots, Y_t) \in A\}) \cdot P(\{(Y_{t+1}, \dots, Y_T) \in B\}) \\ &\quad = P(\{(Y_1, \dots, Y_t) \in A\}) \cdot P(\{(Y_1, \dots, Y_{T-t}) \in B\}). \end{aligned}$$

*Beweis.* Siehe ÜBUNG 3:H9 für eine allgemeinere Aussage im Fall von Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$. Siehe auch Irle (2001, p. 163, 169). □

**Satz 4.** Für $t \in \{1, \dots, T-1\}$ und $s \in \mathbb{Z}^t$ mit $P(\{(S_1, \dots, S_t) = s\}) > 0$ gilt für alle $B \subseteq \mathbb{Z}^{T-t}$

$$\begin{aligned} P(\{(S_{t+1}, \dots S_T) \in B\} \mid \{(S_1, \dots, S_t) = s\}) &= P(\{(S_{t+1}, \dots S_T) \in B\} \mid \{S_t = s_t\}) \\ &= P(\{(S_1, \dots S_{T-t}) \in B - (s_t, \dots, s_t)\}). \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei $t$ wie oben und sei $s \in \mathbb{Z}^t$. Betrachte den Spezialfall $B = \{z\}$ mit

$$z = (z_{t+1}, \dots, z_T) \in \mathbb{Z}^{T-t}.$$

Setze $z_t = s_t$. Lemma 3 zeigt

$$
\begin{aligned}
&P(\{(S_{t+1}, \dots S_T) = z\} \cap \{(S_1, \dots, S_t) = s\}) \\
&\quad = P\left(\bigcap_{j=1}^{t} \{Y_j = s_j - s_{j-1}\} \cap \bigcap_{j=t+1}^{T} \{Y_j = z_j - z_{j-1}\}\right) \\
&\quad = P(\{(S_1, \dots, S_t) = s\}) \cdot P\left(\bigcap_{j=1}^{T-t} \{Y_j = z_{j+t} - z_{j+t-1}\}\right) \\
&\quad = P(\{(S_1, \dots, S_t) = s\}) \cdot \underbrace{P(\{(S_1, \dots S_{T-t}) = (z_{t+1} - s_t, \dots, z_T - s_t)\})}_{=:q}.
\end{aligned}
$$

Im Fall $t > 1$ erhalten wir hiermit

$$
\begin{aligned}
&P(\{(S_{t+1}, \dots S_T) = z\} \cap \{S_t = s_t\}) \\
&\quad = \sum_{w \in \mathbb{Z}^{t-1}} P(\{(S_{t+1}, \dots S_T) = z\} \cap \{(S_1, \dots, S_t) = (w, s_t)\}) \\
&\quad = \sum_{w \in \mathbb{Z}^{t-1}} P(\{(S_1, \dots, S_t) = (w, s_t)\}) \cdot q \\
&\quad = P(\{S_t = s_t\}) \cdot q.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt die Behauptung für $B = \{z\}$.

Zum Beweis des allgemeinen Falles schreibe man $B$ als Vereinigung einelementiger Mengen. □

**Beispiel 5.** Für $t$ und $s$ wie oben und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$
P(\{S_T = k\} \mid \{(S_1, \dots, S_t) = s\}) = P(\{S_T = k\} \mid \{S = s_t\}) = P(\{S_{T-t} = k - s_t\}).
$$

Nun: eine zweite Sicht auf die Irrfahrt. Setze dazu $s_0 := 0$ und

$$
D := \{(s_0, \dots, s_T) \in \mathbb{Z}^{T+1} : \forall 1 \le t \le T : |s_t - s_{t-1}| = 1\}.
$$

**Satz 6.** Es gilt $|D| = 2^T$ und

$$
P(\{(S_0, \dots, S_T) = s\}) = 1/|D|
$$

für alle $s \in D$.

*Beweis.* Der Übergang von Partialsummen zu Inkrementen zeigt

$$
|D| = |\{-1, 1\}^T| = 2^T,
$$

und

$$
\{(S_0, \dots, S_T) = s\}) = \bigcap_{t=1}^{T} \{Y_t = s_t - s_{t-1}\}.
$$

Für $s \in D$ folgt $P(\{(S_0, \dots, S_T) = s\}) = 2^{-T}$. □

Fazit: eine Irrfahrt entspricht der Gleichverteilung auf der Menge $D$ ihrer Pfade. Dies ermöglicht den Einsatz kombinatorischer Methoden zum Studium der Irrfahrt.

Wir bestimmen die Verteilungsfunktionen folgender Zufallsvariablen:

(i) Spielstand nach der letzten Runde, $X := S_T$,

(ii) maximaler Spielstand, $X := \max_{t=0,\dots,T} S_t$,

(iii) Anzahl der Runden, nach denen Spieler I führt,

$$X := |\{t \in \{1,\dots,T\} : S_t \geq 0 \text{ und } S_{t-1} \geq 0\}|.$$

Beachte

$$\{S_t \geq 0\} \cap \{S_{t-1} \geq 0\} = \{S_t > 0\} \cup (\{S_t = 0\} \cap \{S_{t-1} > 0\})\,.$$

Definiere Abbildung $f : D \to \mathbb{Z}$

(i) $f(s_0,\dots,s_T) = s_T$,

(ii) $f(s_0,\dots,s_T) = \max_{t=0,\dots,T} s_t$,

(iii) $f(s_0,\dots,s_T) = |\{t \in \{1,\dots,T\} : s_t \geq 0 \text{ und } s_{t-1} \geq 0\}|$.

Somit

$$X = f \circ (S_0,\dots,S_T).$$

Gesucht ist

$$P(\{X = k\})$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Siehe auch Širjaev (1988, Kap. 1.10).

**Bemerkung 7.** Die Simulation von $n$ unabhängigen Wiederholungen der Irrfahrt geschieht folgendermaßen. Betrachte eine iid-Folge $Y'_1,\dots,Y'_{n\cdot T}$ mit $Y'_1 \sim \mathbf{SB}$. Definiere für $t = 0,\dots,T$ und $i = 1,\dots,n$

$$S'_{i,t} := \sum_{j=1}^{t} Y'_{(i-1)\cdot T+j}.$$

Also

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{Y'_1,\dots,Y'_T}_{\downarrow}, & \dots & ,\underbrace{Y'_{(n-1)\cdot T+1}, \quad \dots \quad ,Y'_{n\cdot T}}_{\downarrow} \\
\underbrace{S'_{1,0},\dots,S'_{1,T}}_{f\downarrow}, & \dots & ,\underbrace{S'_{n,0},\dots,S'_{n,T}}_{f\downarrow} \\
X'_1, & \dots & ,X'_n
\end{array}$$

Dann sind $X_1', \dots, X_n'$ iid und $X_1'$ und $X$ sind identisch verteilt, siehe Lemma 3. Erzeuge eine Realisierung $y_1', \dots, y_{n\cdot T}'$ von $Y_1', \dots, Y_{n\cdot T}'$, setze

$$s_{i,t}' := \sum_{j=1}^{t} y_{(i-1)\cdot T+j}',$$

und approximiere die gesuchten Wahrscheinlichkeiten $P(\{X = k\})$ durch die relative Häufigkeiten

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1_{\{k\}}(f(s_{i,0}', \dots, s_{i,T}'))$$

der Simulationen, bei denen $f$ den Wert $k$ liefert.

Im folgenden zeigen wir Simulationsergebnisse für

$$T = 50.$$

Beachte: Für die Menge $D$ der Pfade gilt in diesem Fall

$$|D| = 2^{50} = 1.1 \ldots \cdot 10^{15}.$$

Dargestellt wird

$$k \mapsto \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1_{\{k\}}(f(s_{i,0}', \dots, s_{i,T}')).$$

Die Abbildungen III.14 und III.15 zeigen Approximationen für $P(\{S_T = k\})$ auf der Basis von $n = 10^3$ und $n = 10^5$ Wiederholungen.

**Satz 8.** Für $t \in \{1, \dots, T\}$ und $k \in \{-t, -t+2, \dots, t-2, t\}$ gilt

$$P(\{S_t = k\}) = \binom{t}{(k+t)/2} \cdot 2^{-t}.$$

*Beweis.* Mit $U_j := (Y_j + 1)/2$ und $R := \sum_{j=1}^{t} U_j$ gilt

$$S_t = \sum_{j=1}^{t} Y_j = \sum_{j=1}^{t} (2 \cdot U_j - 1) = 2 \cdot R - t.$$

Da $U_1, \dots, U_t$ unabhängig und $U_1 \sim \mathbf{B}(1, p)$, folgt $R \sim \mathbf{B}(t, p)$. Somit

$$P(\{S_t = k\}) = P(\{R = (k+t)/2\}).$$

$\square$

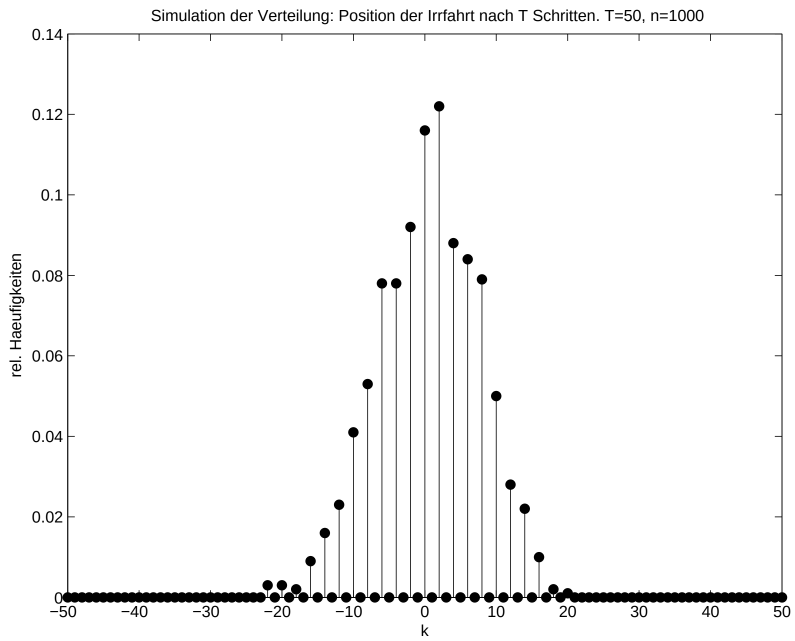


Abbildung III.14: Approximation für $P(\{S_T = k\})$, $n = 10^3$ Wdh.

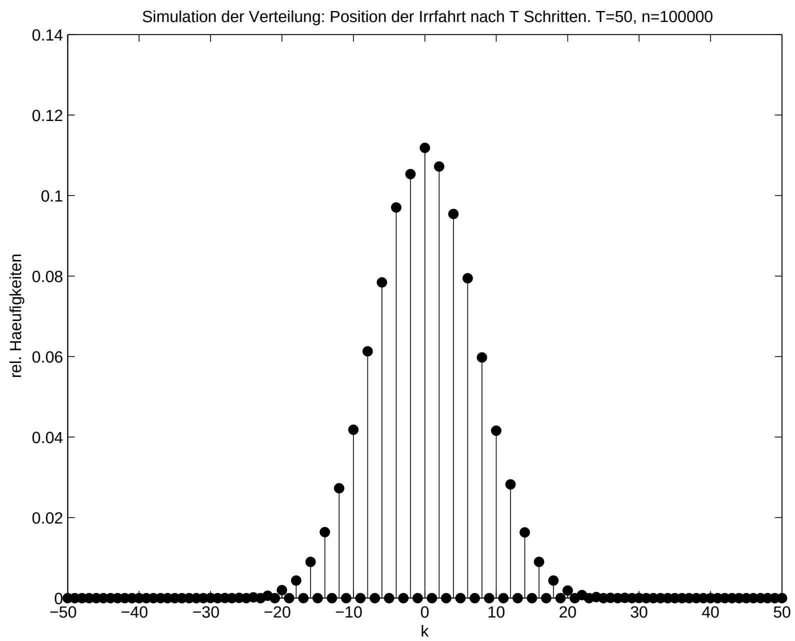


Abbildung III.15: Approximation für $P(\{S_T = k\})$, $n = 10^5$ Wdh.

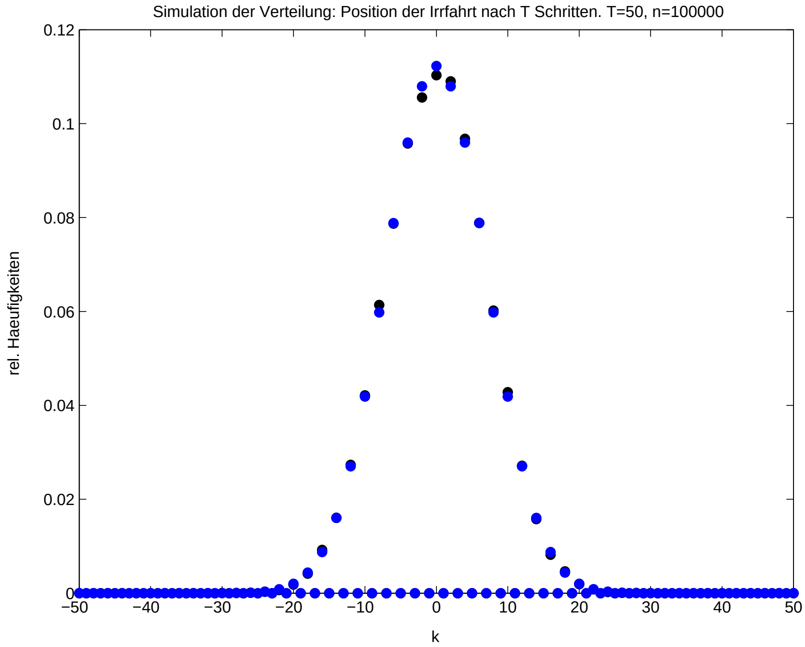


Abbildung III.16: $P(\{S_T = k\})$, exakte Werte und Approximation, $n = 10^5$ Wdh.

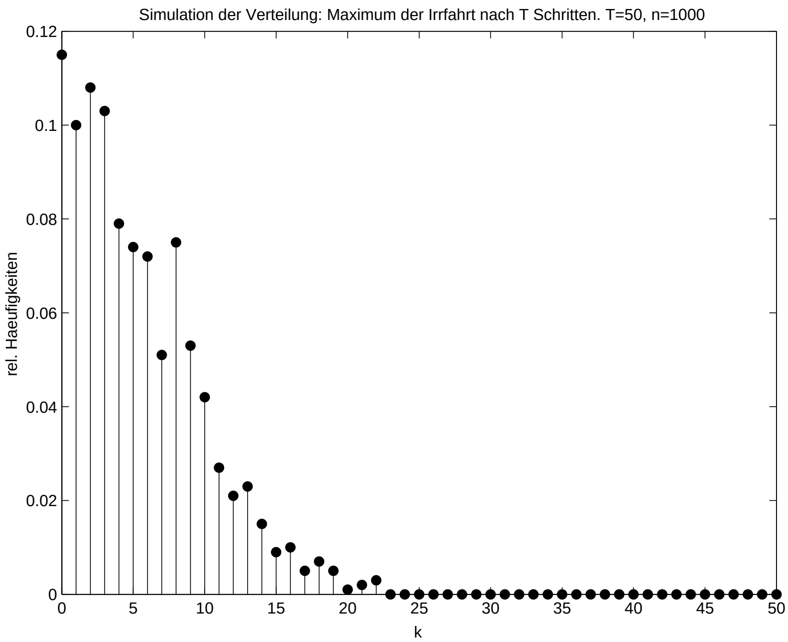


Abbildung III.17: Approximation für $P(\{\max_{t=0,\ldots,T} S_t = k\})$, $n = 10^3$ Wdh.

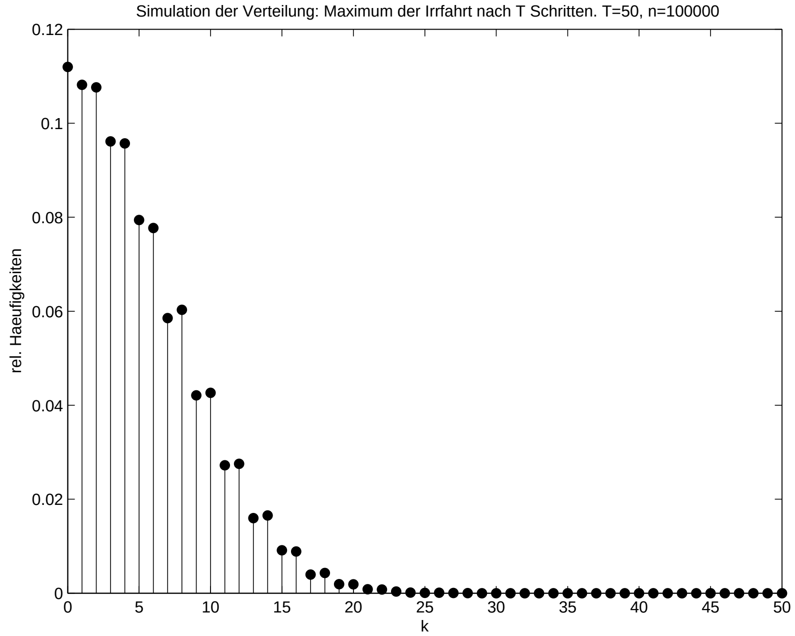


Abbildung III.18: Approximation für $P(\{\max_{t=0,\dots,T} S_t = k\})$, $n = 10^5$ Wdh.

Abbildung III.16 zeigt für $P(\{S_T = k\})$ einen Vergleich der exakten Werten (blau) mit Simulationsergebnissen (schwarz) auf der Basis von $n = 10^5$ Wiederholungen. Die Abbildungen III.17 und III.18 zeigen Approximationen für $P(\{\max_{t=0,\dots,T} S_t = k\})$ auf der Basis von $n = 10^3$ und $n = 10^5$ Wiederholungen.

**Satz 9.** Für $t \in \{1, \dots, T\}$ und $k \in \{0, \dots, t\}$ gilt

$$P(\{\max_{j=0,\dots,t} S_j = k\}) = P(\{S_t = k\}) + P(\{S_t = k+1\}).$$

*Beweis.* Verwende die Bezeichnung aus Satz 6. Fixiere $k \in \{0, \dots, t\}$ und definiere

$$\tau(s) := \inf\{j \in \{0, \dots, t\} : s_j = k\}.$$

Betrachte die Spiegelung der Pfade $s \in D$ an $(k, \dots, k)$, definiere also $\mathcal{R} : D \to D$ durch

$$(\mathcal{R}(s))_j := \begin{cases} s_j, & \text{falls } j \le \tau(s), \\ 2 \cdot k - s_j, & \text{falls } j > \tau(s). \end{cases}$$

Für jedes $\ell \in \mathbb{Z}$ mit $\ell \le k$ definiert $\mathcal{R}$ eine Bijektion zwischen

$$\{s \in D : \max_{j=0,\dots,t} s_j \ge k \wedge s_t = \ell\}$$

und

$$\{s \in D : s_t = 2 \cdot k - \ell\}.$$

Dieses sogenannte Spiegelungsprinzip liefert zusammen mit Satz 6

$$P(\{\max_{j=0,\ldots,t} S_j \geq k\} \cap \{S_t = \ell\}) = P(\{S_t = 2 \cdot k - \ell\}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
&P(\{\max_{j=0,\ldots,t} S_j = k\}) \\
&\quad = \sum_{\ell=-t}^{k} P(\{\max_{j=0,\ldots,t} S_j = k\} \cap \{S_t = \ell\}) \\
&\quad = \sum_{\ell=-t}^{k} \Big( P(\{\max_{j=0,\ldots,t} S_j \geq k\} \cap \{S_t = \ell\}) - P(\{\max_{j=0,\ldots,t} S_j \geq k+1\} \cap \{S_t = \ell\}) \Big) \\
&\quad = \sum_{\ell=-t}^{k} \Big( P(\{S_t = 2 \cdot k - \ell\}) - P(\{S_t = 2 \cdot k + 2 - \ell\}) \Big) \\
&\quad = \sum_{\ell=k}^{t} P(\{S_t = \ell\}) - \sum_{\ell=k+2}^{t} P(\{S_t = \ell\}) \\
&\quad = P(\{S_t = k\}) + P(\{S_t = k+1\}).
\end{aligned}$$

□

Abbildung III.19 zeigt für $P(\{\max_{t=0,\ldots,T} S_t = k\})$ einen Vergleich der exakten Werten (blau) mit Simulationsergebnissen (schwarz) auf der Basis von $n = 10^5$ Wiederholungen.

**Bemerkung 10.** Satz 9 zeigt die überraschende Beziehung

$$P(\{\max_{j=0,\ldots,t} S_j \leq k\}) = P(\{|S_t| \leq k\}),$$

falls $k = t \mod 2$. Die Sätze 8 und 9 liefern die explizite Formel

$$P(\{\max_{j=0,\ldots,t} S_j = k\}) = \begin{cases} \binom{t}{(k+t)/2} \cdot 2^{-t}, & \text{falls } k = t \mod 2, \\ \binom{t}{(k+1+t)/2} \cdot 2^{-t}, & \text{falls } k \neq t \mod 2 \end{cases}$$

für $k \in \{0, \ldots, t\}$.

Im folgenden sei $T$ gerade.
Wir betrachten

$$X_T := \Big|\big\{t \in \{1, \ldots, T\} : S_t \geq 0 \text{ und } S_{t-1} \geq 0\big\}\Big|.$$

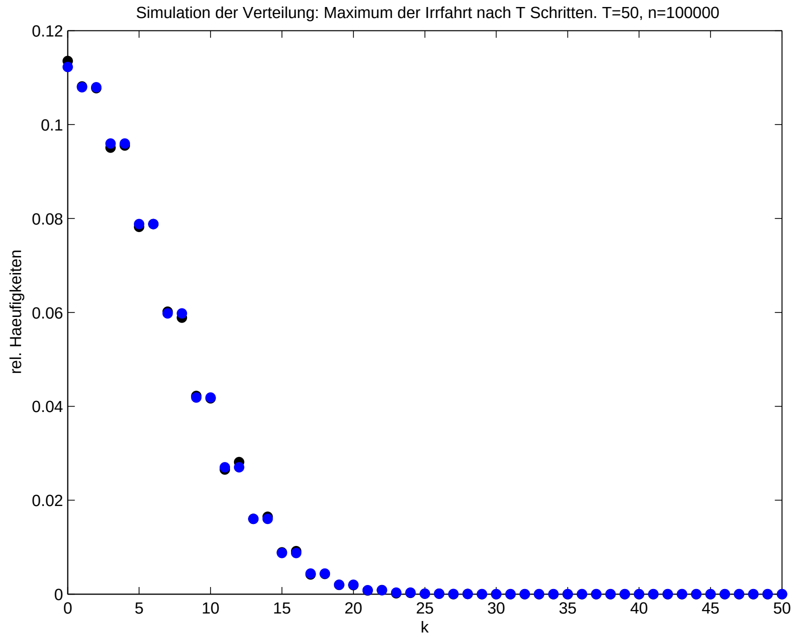


Abbildung III.19: $P(\{\max_{t=0,\dots,T} S_t = k\})$, exakte Werte und Approx., $n = 10^5$ Wdh.

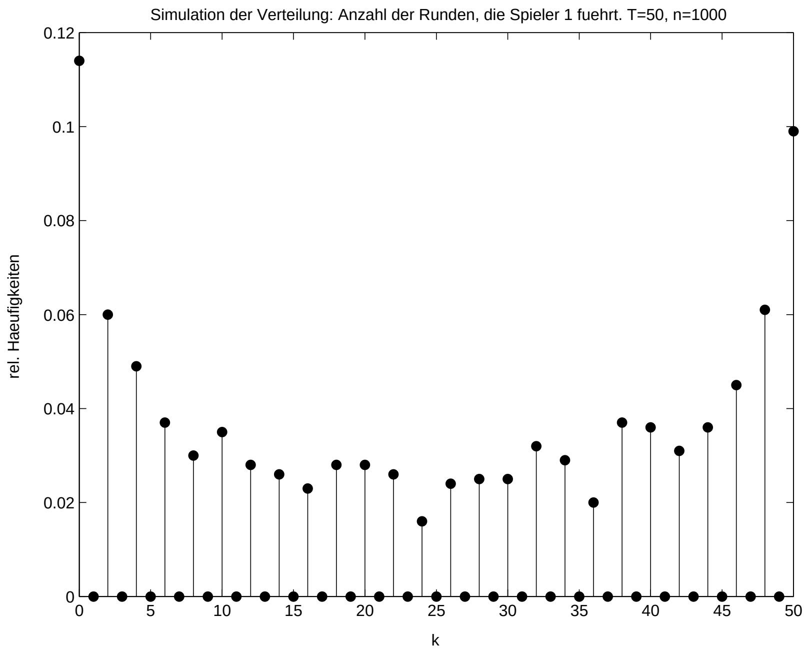


Abbildung III.20: Approximation für $P(\{X_T = k\})$, $n = 10^3$ Wdh.

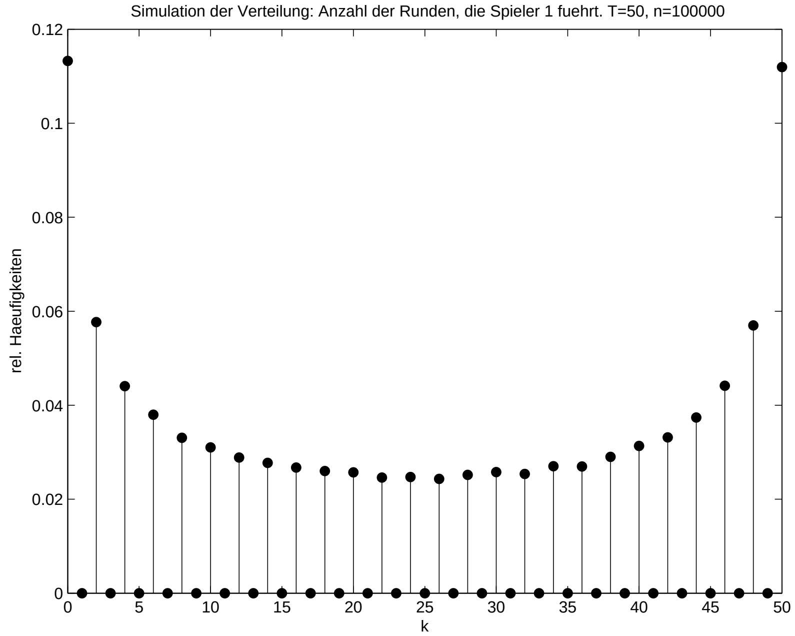


Abbildung III.21: Approximation für $P(\{X_T = k\})$, $n = 10^5$ Wdh.

**Bemerkung 11.** $P(\{X_T = x\}) = 0$, falls $x$ ungerade.

Die Abbildungen III.20 und III.21 zeigen Approximationen für $P(\{X_T = k\})$ auf der Basis von $n = 10^3$ und $n = 10^5$ Wiederholungen. Wie sehen ein völlig überraschendes Monotonieverhalten.

Wir setzen

$$\tau_T := \inf\{t \in \{1, \dots, T\} : S_t = 0\} = \inf\{t \in \{2, 4, \dots, T\} : S_t = 0\}.$$

Falls die Irrfahrt bis zur Zeit $T$ nicht zum Startwert zurückkehrt, liefert die Zufallsvariable $\tau_T$ den Wert $\infty$. Andernfalls gibt $\tau_T$ den ersten Zeitpunkt der Rückkehr an. Vgl. Beispiel 4.15.

**Lemma 12.** Für $k \in \{1, \dots, T/2\}$ gilt

$$\sum_{\ell=1}^{k} P(\{\tau_T = 2\ell\}) \cdot P(\{S_{2k-2\ell} = 0\}) = P(\{S_{2k} = 0\}).$$

*Beweis.* Es gilt

$$\{S_{2k} = 0\} = \bigcup_{\ell=1}^{k} \{S_{2k} = 0\} \cap \{\tau_T = 2\ell\}$$

und

$$\{S_{2k} = 0\} \cap \{\tau_T = 2\ell\} = \{\tau_T = 2\ell\} \cap \left\{ \sum_{j=2\ell+1}^{2k} Y_j = 0 \right\}.$$

Mit Lemma 3 folgt

$$P(\{S_{2k}=0\}) = \sum_{\ell=1}^{k} P(\{\tau_T=2\ell\}) \cdot P\left(\left\{\sum_{j=1}^{2k-2\ell} Y_j = 0\right\}\right)$$
$$= \sum_{\ell=1}^{k} P(\{\tau_T=2\ell\}) \cdot P(\{S_{2k-2\ell}=0\}).$$

□

**Satz 13.** Für $k \in \{0,\dots,T/2\}$ gilt

$$P(\{X_T = 2k\}) = P(\{S_{2k}=0\}) \cdot P(\{S_{T-2k}=0\}).$$

*Beweis.* Setze

$$h(y_{2\ell+1},\dots,y_{2m}) := \left|\left\{t \in \{2\ell+1,\dots 2m\} : \sum_{j=2\ell+1}^{t} y_j \geq 0 \text{ und } \sum_{j=2\ell+1}^{t-1} y_j \geq 0\right\}\right|$$

für $\ell, m \in \{0,\dots,T/2\}$ mit $\ell < m$. Per Induktion nach $m \in \{1,\dots,T/2\}$ zeigen wir, daß

$$P(\{h(Y_1,\dots,Y_{2m}) = 2k\}) = P(\{S_{2k}=0\}) \cdot P(\{S_{2m-2k}=0\})$$

für alle $k \in \{0,\dots,m\}$ gilt.
Setze

$$A_{k,m} := \{h(Y_1,\dots,Y_{2m}) = 2k\}$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Klar: $A_{k,m} = \emptyset$, falls $k < 0$ oder $k > m$. Für $k = 0$ und $k = m$ erhalten wir aufgrund von Satz 9

$$P(A_{0,m}) = P(A_{m,m}) = P(\{\max_{t=0,\dots,2m} S_t = 0\}) = P(\{S_{2m}=0\}) \cdot P(\{S_0 = 0\}),$$

was insbesondere die Induktionsverankerung beinhaltet.
Gelte $m > 1$ und sei $k \in \{1,\dots,m-1\}$. Dann

$$A_{k,m} = \bigcup_{\ell=1}^{m-1} \underbrace{A_{k,m} \cap \{\tau_T = 2\ell\}}_{=:B_\ell}.$$

Setze $A_- := \{\tau_T = 2\ell\} \cap \{S_1 = -1\}$ und $A_+ := \{\tau_T = 2\ell\} \cap \{S_1 = 1\}$. Dann

$$B_\ell = A_{k,m} \cap A_- \cup A_{k,m} \cap A_+$$
$$= \{h(Y_{2\ell+1},\dots,Y_{2m}) = 2k\} \cap A_- \cup \{h(Y_{2\ell+1},\dots,Y_{2m}) = 2k-2\ell\} \cap A_+.$$

Es gilt $P(A_-) = P(A_+) = 1/2 \cdot P(\{\tau_T = 2\ell\})$. Lemma 3 sichert

$$P(B_\ell) = 1/2 \cdot P(\{\tau_T = 2\ell\}) \cdot (P(A_{k,m-\ell}) + P(A_{k-\ell,m-\ell})).$$

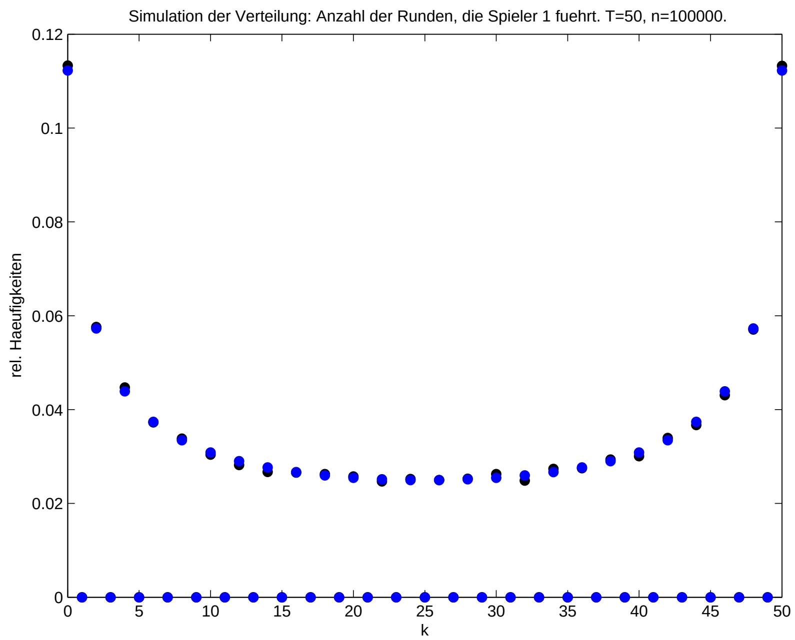


Abbildung III.22: $P(\{X_T = k\})$, exakte Werte und Approximation, $n = 10^5$ Wdh.

Fazit

$$
\begin{aligned}
P(A_{k,m}) &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\ell=1}^{m-1} P(\{\tau_T = 2\ell\}) \cdot (P(A_{k,m-\ell}) + P(A_{k-\ell,m-\ell})) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\ell=1}^{m-k} P(\{\tau_T = 2\ell\}) \cdot P(A_{k,m-\ell}) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\ell=1}^{k} P(\{\tau_T = 2\ell\}) \cdot P(A_{k-\ell,m-\ell}).
\end{aligned}
$$

Wende Lemma 12 und die Induktionsannahme an. □

Abbildung III.22 zeigt für $P(\{X_T = k\})$ einen Vergleich der exakten Werten (blau) mit Simulationsergebnissen (schwarz) auf der Basis von $n = 10^5$ Wiederholungen.

Jetzt: asymptotische Betrachtungen.

**Bezeichnung.** $a_n \approx b_n$ (asymptotische Äquivalenz) für Folgen von Zahlen $a_n, b_n > 0$, falls

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1.$$

**Lemma 14** (Stirlingsche Formel)**.** Es gilt

$$n! \approx \sqrt{2\pi\, n} \cdot (n/e)^n.$$

**Korollar 15.** Es gilt

$$P(\{S_{2n} = 0\}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\, n}}.$$

*Beweis.* Satz 8 und Lemma 14 zeigen für $T = 2n$

$$\begin{aligned} P(\{S_{2n} = 0\}) &= 2^{-2n} \cdot \binom{2n}{n} \\ &\approx 2^{-2n} \cdot \frac{\sqrt{2\pi\, 2n} \cdot (2n)^{2n} \cdot \exp(-2n)}{\left(\sqrt{2\pi\, n} \cdot n^n \cdot \exp(-n)\right)^2} \\ &= \sqrt{1/(\pi\, n)}. \end{aligned}$$

□

**Korollar 16.** Es gilt

$$\frac{P(\{X_{4n} = 4n\})}{P(\{X_{4n} = 2n\})} \approx \sqrt{\pi\, n/2}.$$

*Beweis.* Satz 13 und Korollar 15 zeigen für $T = 4n$

$$\frac{P(\{X_{4n} = 4n\})}{P(\{X_{4n} = 2n\})} = \frac{P(\{S_{4n} = 0\})}{\left(P(\{S_{2n} = 0\})\right)^2} \approx \frac{\sqrt{1/(\pi\, 2n)}}{1/(\pi\, n)} = \sqrt{\pi\, n/2}.$$

□

**Beispiel 17.** Für $T = 1000$ gilt $\sqrt{\pi\, T/8} = 19.8166\ldots$ und

$$\frac{P(\{X_{1000} = 1000\})}{P(\{X_{1000} = 500\})} = 19.8315\ldots.$$

Nun betrachten wir den relativen Anteil

$$Z_T := \frac{1}{T} \cdot |\{t \in \{1, \ldots, T\} : S_t \geq 0 \text{ und } S_{t-1} \geq 0\}|$$

der Runden, nach denen Spieler I führt.

Wir vergleichen die Verteilungsfunktionen von $Z_T$ für $T = 50$, 100 und 1000, siehe Abbildung. Vermutung: Konvergenz. Bestätigung und Bestimmung des Grenzwertes folgt.

Dazu sei

$$f(y) := \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{y \cdot (1-y)}}, \qquad 0 < y < 1,$$

und

$$F(x) = \int_0^x f(y)\, dy, \qquad x \in [0,1].$$

**Bemerkung 18.** Es gilt

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin\left(\sqrt{x}\right)$$

und somit insbesondere $\int_0^1 f(y)\, dy = 1$.

**Satz 19** (Arcussinus-Gesetz)**.** Für alle $0 < u < v < 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(\{u \leq Z_{2n} \leq v\}) = F(v) - F(u).$$

*Beweis.* Fixiere $0 < u < v < 1$ und setze

$$K_n := \{k \in \{0, \dots, n\} : u \leq k/n \leq v\}$$

sowie

$$a_{k,n} := P(\{S_{2k} = 0\}) \cdot P(\{S_{2n-2k} = 0\}),$$

für $k \in K_n$. Satz 13 zeigt

$$P(\{u \leq Z_{2n} \leq v\}) = P(\{u \cdot 2n \leq X_{2n} \leq v \cdot 2n\}) = \sum_{k\in K_n} P(\{X_{2n} = 2k\}) = \sum_{k\in K_n} a_{k,n}.$$

Verwende Korollar 15 und $\lim_{n\to\infty} \inf K_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{n - k : k \in K_n\} = \infty$ um

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in K_n} \left| \frac{n \cdot a_{k,n}}{f(k/n)} - 1 \right| = 0 \tag{1}$$

zu erhalten. Aufgrund der Stetigkeit von $f$ auf $[u, v]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K_n} \frac{f(k/n)}{n} = \int_u^v f(y)\, dy.$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k\in K_n} a_{k,n} - \sum_{k\in K_n} \frac{f(k/n)}{n} \right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K_n} \left( \frac{f(k/n)}{n} \cdot \sup_{k\in K_n} \left| \frac{n \cdot a_{k,n}}{f(k/n)} - 1 \right| \right) = 0$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} P(\{u \leq Z_{2n} \leq v\}) = \int_u^v f(y)\, dy.$$

□

**Bemerkung 20.** Gleichung (1) besagt, daß die reskalierten Wahrscheinlichkeiten $a_{k,n}$ lokal gleichmäßig gegen $f$ konvergieren.

**Korollar 21.** Für alle $x \in [0, 1]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Z_{2n} \leq x\}) = F(x).$$

*Beweis.* Für $x = 0$ folgt die Aussage aus Satz 13 und Korollar 15. Für $0 < x \leq 1$ wählen wir $0 < u < \min(x, 1/2)$. Da $P(\{Z_{2n} < u\}) = P(\{Z_{2n} > 1 - u\})$, folgt

$$P(\{Z_{2n} < u\}) = 1/2 \cdot (1 - P(\{u \leq Z_{2n} \leq 1 - u\})).$$

Satz 19 sichert

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Z_{2n} < u\}) = F(u).$$

Wende Satz 19 an. □

**Definition 22.** Eine Zufallsvariable $X$ mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin\left(\sqrt{x}\right), \qquad x \in [0,1],$$

heißt *arcussinus-verteilt*.

**Bemerkung 23.** Mit den Sätzen 4.12 und 19 und mit $\boxed{\text{ÜBUNG}}$ haben wir einige Konvergenzsätze für Folgen diskreter Zufallsvariablen kennengelernt. Der zugrundeliegende Konvergenzbegriff wird in Abschnitt VII.3 allgemein gefaßt. In Satz 19 zeigt sich erstmals, daß eine nicht-diskrete Verteilung als Grenzwert einer Folge diskreter Verteilungen auftreten kann.

Wir bestimmen die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Irrfahrt bis zur Zeit $2k$ nicht zum Startwert zurückkehrt.

**Satz 24.** Für $k \in \{1, \ldots, T/2\}$ gilt

$$P(\{\tau_T > 2k\}) = P(\{S_{2k} = 0\}).$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
\{\tau_T > 2k\} &= \bigcap_{j=1}^{2k} \{S_j \neq 0\} \\
&= \left(\{S_1 = -1\} \cap \bigcap_{j=2}^{2k} \{S_j < 0\}\right) \cup \left(\{S_1 = 1\} \cap \bigcap_{j=2}^{2k} \{S_j > 0\}\right)
\end{aligned}$$

Es folgt

$$P(\{\tau_T > 2k\}) = 2 \cdot P\left(\{S_1 = -1\} \cap \bigcap_{j=2}^{2k} \{S_j < 0\}\right).$$

Mit den Sätzen 4 und 9 ergibt sich

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{j=2}^{2k} \{S_j < 0\} \,|\, \{S_1 = -1\}\right) &= P\left(\bigcap_{j=1}^{2k-1} \{S_j \leq 0\}\right) \\
&= P(\{\max_{j=0,\ldots,2k} S_j = 0\}) = P(\{S_{2k} = 0\}).
\end{aligned}$$

□

Wie wahrscheinlich ist es nie zum Startwert zurückzukehren? Zur Untersuchung dieser Frage betrachten wir eine unabhängige Folge $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ mit $Y_1 \sim \mathbf{SB}$ und definieren die symmetriche Bernoulli-Irrfahrt mit unendlichem Zeithorizont durch $S_0 = 0$ sowie $S_t = S_{t-1} + Y_t$ für $t \in \mathbb{N}$. (Man beachte jedoch Bemerkung 4.18.)

Wir setzen

$$\tau_\infty := \inf\{t \in \mathbb{N} : S_t = 0\}.$$

**Satz 25.** Es gilt
$$P(\{\tau_\infty = \infty\}) = 0.$$

*Beweis.* Es gilt
$$\{\tau_\infty = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau_{2n} = \infty\}$$
und $\{\tau_{2n} = \infty\} \supset \{\tau_{2n+2} = \infty\}$, so daß
$$P(\{\tau_\infty = \infty\}) = \lim_{n\to\infty} P(\{\tau_{2n} = \infty\}) = \lim_{n\to\infty} P(\{S_{2n} = 0\})$$
mit den Sätzen I.1.17 und 24 folgt. Wende Korollar 15 an. □

Ausblick: Rekurrenz und Transienz in Dimension $d \in \mathbb{N}$.

# Definitionen und Bezeichnungen