Inhaltsverzeichnis

Kapitel III

Diskrete Modelle

In diesem Kapitel untersuchen wir stochastische Modelle für Zufallsexperimente, bei denen die Menge der möglichen Ausgänge abzählbar ist.

1 Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Definition 1. $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ heißt *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum*, falls Ω abzählbar ist und $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt.

Im folgenden seien Ω und $\mathfrak{A}$ wie oben.
Frage: Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathfrak{A}$?

Definition 2. $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion* (auf Ω), falls

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1.$$

Interpretation: Punktmassen $f(\omega)$. Graphische Darstellung: Stabdiagramm.

Satz 3.

(i) Jede Wahrscheinlichkeitsfunktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$P(A) := \sum_{\omega \in A} f(\omega), \qquad A \subseteq \Omega, \tag{1}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{A}$, und es gilt

$$f(\omega) = P(\{\omega\}), \qquad \omega \in \Omega. \tag{2}$$

(ii) Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathfrak{A}$ definiert (2) eine Wahrscheinlichkeitsfunktion f auf Ω, und es gilt (1) .

Beweis. Ad (i): Offenbar gilt $P(A) \in [0,1]$ und $P(\Omega) = 1$. Ferner gilt für $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit p.d. Mengen $A_i \subseteq \Omega$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} f(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_i} f(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

ggf. aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihen.
Ad (ii): klar. □

Modellierung durch Wahl von f. Siehe bereits Beispiel I.1.13 und I.2.6. Dazu

- kombinatorische Methoden, oft ausgehend von Gleichverteilungsannahmen,
- statistische Schätzung, siehe bereits Beispiel I.1.13.

Beispiel 4. Die Gleichverteilung auf einer endlichen Menge Ω entspricht der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(\omega) := \frac{1}{|\Omega|}, \qquad \omega \in \Omega.$$

2 Elementare Kombinatorik

Wir untersuchen die Abzählung von endlichen Mengen zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten (unter Gleichverteilungsannahmen).

Erinnerung

(i) $n! := 1 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $0! := 1$.

(ii) Binomialkoeffizienten: für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ ist

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

und es gilt Rekursionsformel für $k \neq 0$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

(iii) Binomischer Lehrsatz: für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}.$$

Im folgenden seien $N, N_1, \ldots, N_k$ endliche nicht-leere Mengen und $n := |N|$.

Satz 1.

$$|N_1 \times \ldots \times N_k| = |N_1| \cdot \ldots \cdot |N_k|.$$

Beweis. Induktion über k. Hier: Induktionsschluß. Für $x \in N_{k+1}$ sei

$$A_x := \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k+1}) \in N_1 \times \cdots \times N_{k+1} : x = \omega_{k+1}\}.$$

Dann $A_x \cap A_y = \emptyset$ für $x \neq y$ sowie

$$N_1 \times \ldots \times N_{k+1} = \bigcup_{x \in N_{k+1}} A_x.$$

Ferner, unter Verwendung der Induktionsannahme,

$$|A_x| = |N_1 \times \ldots N_k| = |N_1| \cdot \ldots \cdot |N_k|.$$

Fazit

$$|N_1 \times \ldots \times N_{k+1}| = \sum_{x \in N_{k+1}} |N_1 \times \ldots \times N_k| = |N_{k+1}| \cdot |N_1| \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot |N_k|.$$

□

Bemerkung 2. Obiger Satz mit $N = N_1 = \ldots = N_k$ zeigt: Die Anzahl der Stichproben vom Umfang k aus N unter Berücksichtigung der Reihenfolge mit Zurücklegen beträgt n^k. Dies ist ebenfalls die Anzahl der Abbildungen $\{1, \ldots, k\} \to N$.

Satz 3.

$$\begin{aligned} &|\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in N^k : \omega_1, \ldots, \omega_k \text{ paarw. verschieden}\}| \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1). \end{aligned}$$

Speziell für $k = n$: Die Anzahl der Permutationen von N beträgt $n!$

Beweis. Induktion über k. Hier: Induktionsschluß. Seien $2 \leq k+1 \leq n$ und $x \in N$. Setze

$$Q := \{(\omega_1, \ldots, \omega_{k+1}) \in N^{k+1} : \omega_1, \ldots, \omega_{k+1} \text{ paarw. verschieden}\}$$

und

$$A_x := \{\omega \in Q : \omega_{k+1} = x\}.$$

Dann

$$\begin{aligned} |A_x| &= |\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in (N \backslash \{x\})^k : \omega_1, \ldots, \omega_k \text{ paarw. verschieden}\}| \\ &= (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-1-k+1) = (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k). \end{aligned}$$

Also

$$|Q| = (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot n = \frac{n!}{(n-(k+1))!}.$$

□

Bemerkung 4. Obiger Satz bestimmt die Anzahl der Stichproben vom Umfang k aus N unter Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen. Dies ist ebenfalls die Anzahl der Injektionen $\{1, \ldots, k\} \to N$.

Beispiel 5. Betrachte $\Omega := N^k$ mit der Gleichverteilung P. Gesucht sei die Wahrscheinlichkeit, daß in der Stichprobe $\omega \in \Omega$ mindestens 2 Komponenten übereinstimmen. Also

$$A := \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \Omega : \exists i \neq j : \omega_i = \omega_j\}.$$

Es gilt $P(A) = 1 - P(A^c)$ und

$$\begin{aligned} P(A^c) &= \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k} = \frac{n \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{n \cdot \ldots \cdot n} \\ &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Für $n = 365$ (Geburtstagszwillinge) ergibt sich näherungsweise

k	4	16	22	23	40	64
$P(A)$	0,016	0,284	0,476	0,507	0,891	0,997

Implizit wird hier angenommen: die Geburtstage sind unabhängig und jeweils gleichverteilt auf $N = \{1, \ldots, 365\}$, siehe Beispiel 3.4 und Bemerkung 3.7.

Satz 6. Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt

$$|\{K \subseteq N : |K| = k\}| = \binom{n}{k}.$$

Beweis. Induktion über $n = |N|$. Hier: Induktionsschluß. Sei $|N'| = n + 1 \in \mathbb{N}$. Die Behauptung gilt offenbar für $k = 0$ und $k = n + 1$, also sei fortan $k \in \{1, \ldots, n\}$. Fixiere $x \in N'$, setze $N := N' \setminus \{x\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} &|\{K' \subseteq N' : |K'| = k\}| \\ &\quad = |\{K' \subseteq N' : |K'| = k \wedge x \in K'\}| + |\{K' \subseteq N' : |K'| = k \wedge x \notin K'\}| \\ &\quad = |\{K \subseteq N : |K| = k-1\}| + |\{K \subseteq N : |K| = k\}| \\ &\quad = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 7. Obiger Satz bestimmt die Anzahl der Stichproben vom Umfang k aus N ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen.
Vergleich der Sätze 3 und 6: es gilt

$$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Interpretation: Teilmenge auswählen und anordnen.

Beispiel 8. Lotto: Gleichverteilung auf

$$\Omega := \{K \subseteq \{1, \dots, 49\} : |K| = 6\}.$$

Also gilt für jedes $\omega \in \Omega$

$$P(\{\omega\}) = 1/\binom{49}{6} = 7,15 \ldots \cdot 10^{-8}.$$

Die Anzahl der Stichproben vom Umfang k aus N ohne Berücksichtigung der Reihenfolge mit Zurücklegen wird in $\boxed{\text{Übung}}$ bestimmt.

3 Produkträume

Gegeben: diskrete Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P_1), \dots, (\Omega_n, \mathfrak{A}_n, P_n)$ Gesucht: Modell für die „unabhängige Hintereinanderausführung“ der Einzelexperimente (Produktexperiment).

Beispiel 1. n-maliges Würfeln, n Geburten, usw. Fragwürdig bei Callcenter an n Tagen.

Definiere

$$\begin{aligned} \Omega &:= \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n, \\ \mathfrak{A} &:= \mathfrak{P}(\Omega), \\ f(\omega) &:= f_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot f_n(\omega_n), \quad \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

wobei f_i die zu P_i gehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω_i bezeichnet.

Lemma 2. f ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω.

Beweis. Klar: $f \geq 0$. Ferner, ggf. aufgrund der absoluten Konvergenz,

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) &= \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} \cdots \sum_{\omega_n \in \Omega_n} f_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot f_n(\omega_n) \\ &= \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} f_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot \sum_{\omega_n \in \Omega_n} f_n(\omega_n) = 1. \end{aligned}$$

□

Definition 3. Sei P das durch f definierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{A}$. Dann heißt $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ das *Produkt der Wahrscheinlichkeitsräume* $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, P_i)$ und P das *Produkt der Wahrscheinlichkeitsmaße* P_i.

Beispiel 4. Für endliche Mengen Ω_i und Gleichverteilungen P_i ist das Produktmaß P die Gleichverteilung auf Ω, siehe Satz 2.1. So etwa für n-maliges Würfeln

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}^n$$

und

$$P(\{\omega\}) = 1/6^n$$

für $\omega \in \Omega$.

Beispiel 5. Geschlecht von n Neugeborenen,

$$\Omega_i := \{\mathrm{W}, \mathrm{M}\}, \;\; f_i(\mathrm{W}) := p, \;\; f_i(\mathrm{M}) := 1 - p.$$

Also

$$f(\omega) = p^{k(\omega)} \cdot (1-p)^{n-k(\omega)}$$

mit

$$k(\omega) := |\{i \in \{1, \ldots, n\} : \omega_i = \mathrm{W}\}|.$$

Im folgenden sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ das Produkt der Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, P_i)$. Zurück zu den Einzelexperimenten gelangt man durch die Projektionen

$$X_i : \Omega \to \Omega_i,$$

d.h.

$$X_i(\omega) := \omega_i.$$

Siehe etwa Beispiel I.3.4.

Satz 6. Für $A_1 \subseteq \Omega_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega_n$ gilt

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in A_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i).$$

Beweis. Es gilt (vgl. Beweis Lemma 2)

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}\right) &= P(A_1 \times \ldots \times A_n) = \sum_{\omega \in A_1 \times \ldots \times A_n} f(\omega) \\ &= \sum_{\omega_1 \in A_1} \ldots \sum_{\omega_n \in A_n} f_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot f_n(\omega_n) = P_1(A_1) \cdot \ldots \cdot P_n(A_n). \end{aligned}$$

Die Wahl von $A_j = \Omega_j$ für $j \neq i$ zeigt

$$P(\{X_i \in A_i\}) = P_i(A_i).$$

□

Bemerkung 7. Ziel erreicht. Genauer:

(i) Das Produktraum-Modell beinhaltet die Modelle der Einzelexperimente, da

$$P(\{X_i \in A_i\}) = P_i(A_i)$$

für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $A_i \subseteq \Omega_i$.

(ii) Falls $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \subseteq \mathbb{R}$ (oder bei Verwendung eines allgemeineren Begriffs von Zufallsvariablen und deren Unabhängigkeit), so sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Zum Beweis wähle man $A_i =]-\infty, x_i] \cap \Omega_i$ bzw. Ω_i in Satz 6.

Der Spezialfall $P_1 = \cdots = P_n$ liefert eine iid-Folge $X_1, \ldots, X_n$.

Siehe Georgii (2007, Kap. 3.2) und Krengel (2000, Kap. 2.6) zur Modellierung mehrstufiger Experimente mit Abhängigkeiten.

4 Diskrete Zufallsvariablen

Im folgenden seien $X, X_1, \ldots$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Definition 1. X heißt *diskrete Zufallsvariable*, falls $P(\{X \in D\}) = 1$ für eine abzählbare Menge $D \subset \mathbb{R}$ gilt.

Bemerkung 2. $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ diskret $\Rightarrow$ $X(\Omega)$ abzählbar $\Rightarrow$ X diskret.

Beispiel 3. Pfeiltreffer auf Dartscheibe, X Nummer des getroffenen Sektors, siehe Beispiel I.3.7.

Lemma 4. Diskrete Zufallsvariablen X, X' sind genau dann identisch verteilt, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; P(\{X = x\}) = P'(\{X' = x\}).$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Wende Satz I.3.9 an.

„$\Leftarrow$“: Betrachte eine abzählbare Menge $D \subset \mathbb{R}$ mit $P(\{X \in D\} \cap \{X' \in D\}) = 1$ im Beweis in Beispiel I.3.7 □

Bemerkung 5. Ist X diskret, so definiert $f(x) = P(\{X = x\})$ auf jeder abzählbaren Menge $D \subset \mathbb{R}$ mit $P(\{X \in D\}) = 1$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Definition 6. X heißt *Bernoulli-verteilt* mit Parameter $p \in [0, 1]$, falls

$$P(\{X = 1\}) = p \qquad \text{und} \qquad P(\{X = 0\}) = 1 - p.$$

Bez.: $X \sim \mathbf{B}(1, p)$.

Beispiel 7. Betrachte n gleichartige Produkte, die voneinander unabhängig

- mit Wahrscheinlichkeit p funktionstüchtig
- mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ defekt.

Hierbei sei $p \in [0,1]$, z.B. empirisch bestimmt als relative Häufigkeit.
Gesucht: Wahrscheinlichkeit, daß genau k Produkte funktionstüchtig sind. Daraus durch Summation: Wahrscheinlichkeit, daß mindestens k Produkte funktionstüchtig sind.
Konkretes Modell: Produktexperiment mit $\Omega_i := \{0,1\}$ und

$$f_i(\omega_i) := \begin{cases} p, & \text{falls } \omega_i = 1 \\ 1-p, & \text{falls } \omega_i = 0. \end{cases}$$

Also $\Omega := \{0,1\}^n$ Menge der Produktionsergebnisse und für $\omega \in \Omega$

$$f(\omega) := f_1(\omega_1) \cdot \ldots \cdot f_n(\omega_n).$$

Berechne bzgl. des Produktmaßes P

$$P(\{\omega \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k\}).$$

Abstraktes Modell: $X_1, \ldots, X_n$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$ (es gilt $X_i(\omega) = \omega_i$ im konkreten Modell). Die Anzahl funktionstüchtiger Produkte ist gegeben durch

$$X := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Berechne

$$P(\{X = k\}).$$

Modellierung analog bei n-fachem Münzwurf oder n Geburten, X Anzahl der geworfenen K bzw. Anzahl der weiblichen Neugeborenen.

Satz 8. Seien $X_1, \ldots, X_n$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$. Ferner sei

$$X := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Dann gilt für $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$P(\{X = k\}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \tag{1}$$

Beweis. Es gilt

$$P(\{(X_1,\ldots,X_n) \in \{0,1\}^n\}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \in \{0,1\}\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i \in \{0,1\}\}) = 1.$$

Setze

$$A_k := \{x \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = k\}.$$

Gemäß Satz 2.6 gilt

$$|A_k| = \binom{n}{k}.$$

Damit folgt für $k \in \{0,\ldots,n\}$

$$\begin{aligned} P(\{X = k\}) &= P\Big(\{X = k\} \cap \bigcup_{x\in\{0,1\}^n} \{(X_1,\ldots,X_n) = x\}\Big) \\ &= \sum_{x\in\{0,1\}^n} P(\{X = k\} \cap \{(X_1,\ldots,X_n) = x\}) \\ &= \sum_{x\in A_k} \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i = x_i\}) \\ &= |A_k| \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

□

Definition 9. X heißt *binomialverteilt* mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$, falls (1) für alle $k \in \{0,\ldots,n\}$ gilt. Bez.: $X \sim \mathbf{B}(n,p)$.

Zu $X \sim \mathbf{B}(n,p)$ mit $n = 50$ und $p = 0.5$, 0.25, 0.05 stellen wir in den Abbildungen III.1–III.3. die Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf $\{0,\ldots,n\}$ graphisch dar.

Beispiel 10. Betrachte n Produkte, unter denen sich n_0 defekte Produkte befinden. Gesucht: Wahrscheinlichkeit, daß bei Auswahl von k Produkten genau ℓ Produkte defekt sind.
Modell: Gleichverteilung P auf

$$\Omega := \{K \subseteq N : |K| = k\}.$$

Berechne $P(A_\ell)$ für

$$A_\ell := \{K \in \Omega : |K \cap N_0| = \ell\},$$

wobei $N_0 \subseteq N$ fest gewählt mit $|N_0| = n_0$ sei, d.h. bestimme $|\Omega|$ und $|A_\ell|$.
Es gilt $|\Omega| = \binom{n}{k}$ und für

$$\ell \in \{\max(0, k-(n-n_0)), \ldots, \min(n_0,k)\}$$

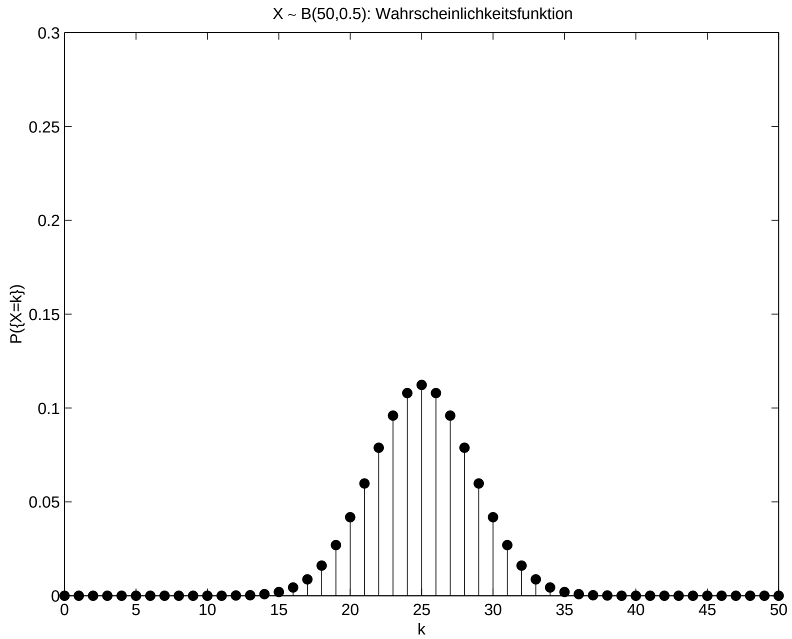

Abbildung III.1: Wahrscheinlichkeitsfunktion zu $X \sim \mathbf{B}(50, 0.5)$

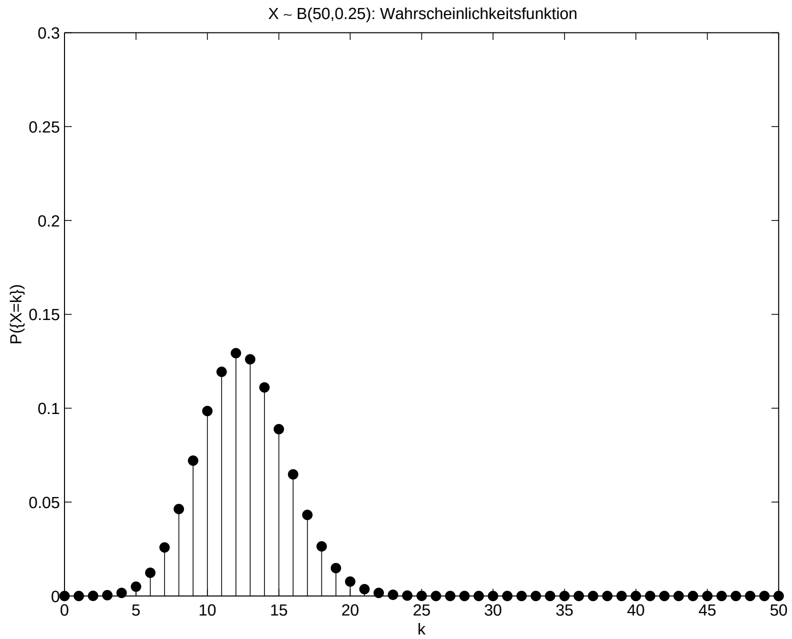

Abbildung III.2: Wahrscheinlichkeitsfunktion zu $X \sim \mathbf{B}(50, 0.25)$

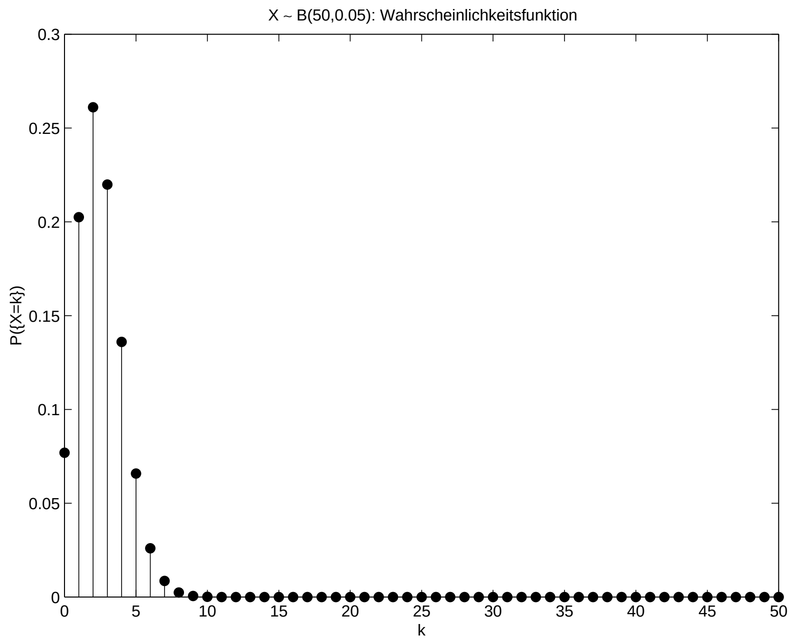

Abbildung III.3: Wahrscheinlichkeitsfunktion zu $X \sim \mathbf{B}(50, 0.05)$

ergibt sich

$$\begin{aligned} |A_\ell| &= |\{(K_0, K_1) : K_0 \subseteq N_0, |K_0| = \ell, K_1 \subseteq N \setminus N_0, |K_1| = k - \ell\}| \\ &= \binom{n_0}{\ell} \cdot \binom{n - n_0}{k - \ell}. \end{aligned}$$

Also

$$P(A_\ell) = \binom{n_0}{\ell} \cdot \binom{n - n_0}{k - \ell} \Big/ \binom{n}{k}.$$

Hiermit ergibt sich auch die Wahrscheinlichkeit, beim Skat genau 3 Asse zu erhalten, als

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{7} \Big/ \binom{32}{10} = 66/899 = 0.0734\ldots$$

Ausblick auf statistische Fragestellungen: Bekannt sei

- die Gesamtanzahl n der Produkte,
- die Stichprobengröße k,
- die Anzahl ℓ defekter Produkte in Stichprobe.

Unbekannt sei

- die Gesamtanzahl n_0 defekter Produkte.

Aufgaben:

(i) Schätze n_0.

(ii) Entscheide, ob $n_0/n \leq 0.02$.

Definition 11. X heißt *hypergeometrisch verteilt* mit Parametern $n \in \mathbb{N}$, $n_0 \in \{0,\dots,n\}$, $k \in \{1,\dots,n\}$, falls

$$P(\{X=\ell\}) = \binom{n_0}{\ell} \cdot \binom{n-n_0}{k-\ell} \Big/ \binom{n}{k}$$

für

$$\ell \in \{\max(0, k-(n-n_0)), \dots, \min(n_0,k)\}.$$

Bez.: $X \sim \mathbf{H}(n,n_0,k)$.

Zu $X \sim \mathbf{H}(100,10,20)$ stellen wir in Abbildung III.4 die Wahrscheinlichkeitsfunktion auf $\{0,\dots,10\}$ graphisch dar. Wir vergleichen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen zu $X \sim \mathbf{H}(n,n_0,50)$ mit $n = 100$, 500, 2000 und $n_0 = n/4$ mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion zu $Y \sim \mathbf{B}(50,0.25)$, siehe Abbildungen III.5–III.7. Vermutung: Konvergenz. Bestätigung: $\boxed{\text{ÜBUNG}}$.

Satz 12 (Poissonscher Grenzwertsatz)**.** Sei $X_n \sim \mathbf{B}(n,p_n)$ mit $p_n \in\,]0,1[$, und gelte $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$ für $\lambda > 0$. Dann

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \lim_{n\to\infty} P(\{X_n = k\}) = \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Beweis. Für $n \geq k$ gilt

$$\binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(\frac{n \cdot p_n}{\lambda}\right)^k}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{(1-\frac{n \cdot p_n}{n})^n}{(1-p_n)^k}}_{\to \exp(-\lambda)} \cdot \underbrace{\prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n}}_{\to 1}.$$

□

Definition 13. X heißt *Poisson-verteilt* mit Parameter $\lambda > 0$, falls

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : P(\{X=k\}) = \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Bez.: $X \sim \mathbf{P}(\lambda)$.

Bemerkung 14. Satz 12 rechtfertigt die Approximation von $\mathbf{B}(n,p_n)$ durch $\mathbf{P}(\lambda)$, falls n „groß“ und p_n „klein“. Siehe Satz VI.1.5 zur Bedeutung von $n \cdot p_n$.

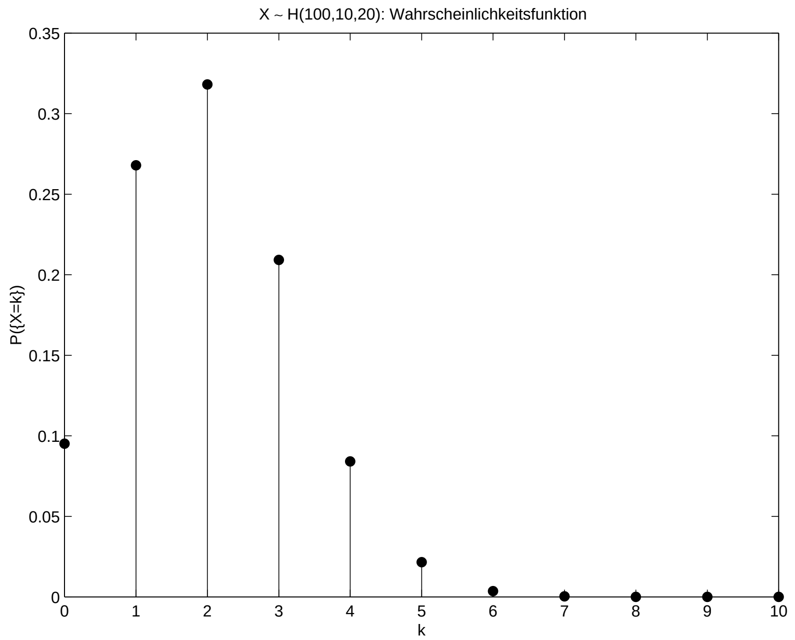

Abbildung III.4: Wahrscheinlichkeitsfunktion zu $X \sim \mathbf{H}(100, 10, 20)$

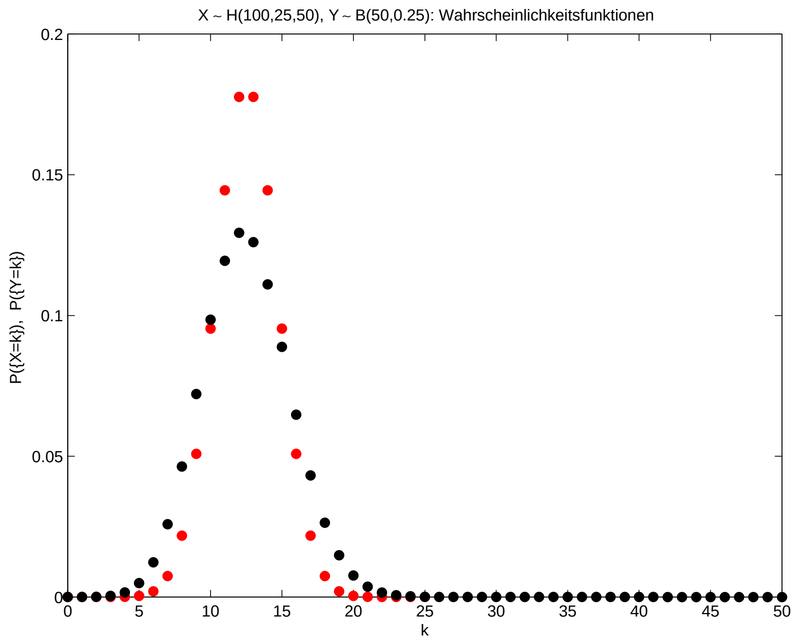

Abbildung III.5: Wahrscheinlichkeitsfunktionen zu $X \sim \mathbf{H}(100, 25, 50)$ (rot) und $Y \sim \mathbf{B}(50, 0.25)$ (schwarz)

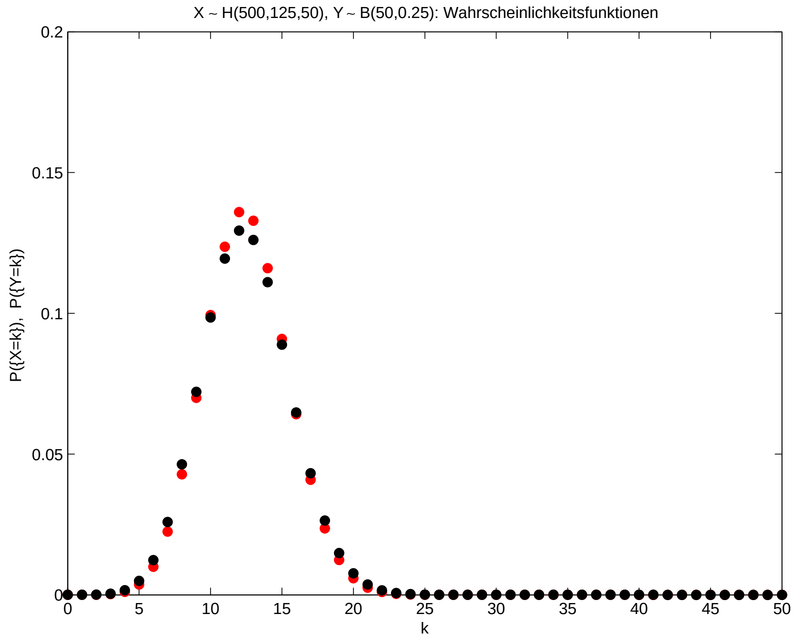

Abbildung III.6: Wahrscheinlichkeitsfunktionen zu $X \sim \mathbf{H}(500, 125, 50)$ (rot) und $Y \sim \mathbf{B}(50, 0.25)$ (schwarz)

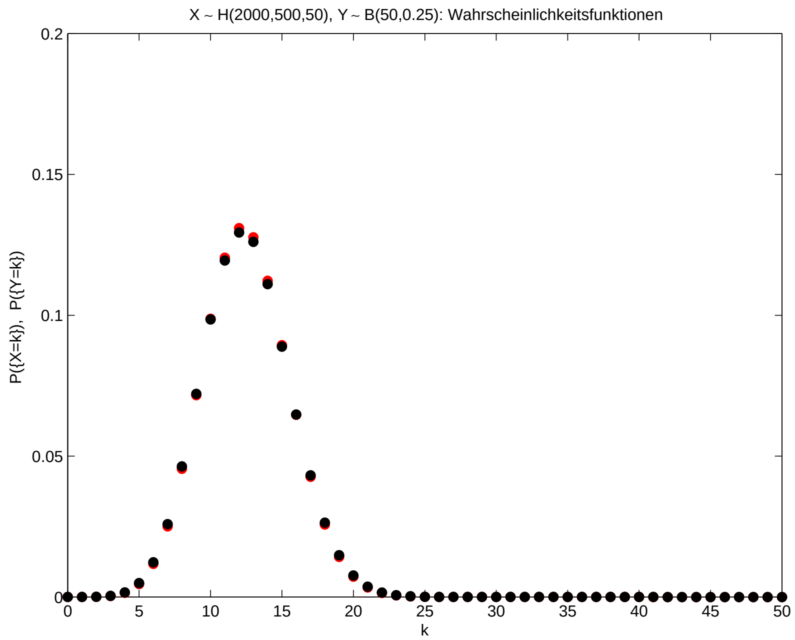

Abbildung III.7: Wahrscheinlichkeitsfunktionen zu $X \sim \mathbf{H}(2000, 500, 50)$ (rot) und $Y \sim \mathbf{B}(50, 0.25)$ (schwarz)

Zur Approximationsgüte gilt folgende Aussage. Für $X_n \sim \mathbf{B}(n,p)$, $X \sim \mathbf{P}(n \cdot p)$ und jede Menge $A \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt

$$|P(\{X_n \in A\}) - P(\{X \in A\})| \leq 2 \cdot n \cdot p^2,$$

siehe $\boxed{\text{Übung}}$.
Anwendung: Modellierung der Anzahl von

- Druckfehlern in Manuskript,
- Anrufen in Call-Center pro Tag,
- radioaktiven Zerfällen pro Zeiteinheit.

Wir vergleichen die Wahrscheinlichkeitsfunktionen zu $X \sim \mathbf{P}(5)$ mit mit den Wahrscheinlichkeitsfunktion zu $Y \sim \mathbf{B}(n, 5/n)$ für $n = 25, 100, 500$, siehe Abbildungen III.8–III.10.

Beispiel 15. Wir betrachten n unabhängige Würfe auf die Dartscheibe. Gesucht: Wahrscheinlichkeit, daß im k-ten Wurf erstmals das obere rechte Viertel getroffen wird.
Abstraktes Modell: $X_1, \ldots, X_n$ iid mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$, wobei $p := 1/4$.
Der Zeitpunkt des ersten Treffers im oberen rechten Viertel ist gegeben durch

$$\tau_n(\omega) := \inf\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i(\omega) = 1\}.$$

Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\{\tau_n = k\} = \bigcap_{i=1}^{k-1} \{X_i = 0\} \cap \{X_k = 1\},$$

also, unabhängig von n,

$$P(\{\tau_n = k\}) = \prod_{i=1}^{k-1} P(\{X_i = 0\}) \cdot P(\{X_k = 1\}) = (1-p)^{k-1} \cdot p.$$

Ferner gilt $P(\{\tau_n = \infty\}) = (1-p)^n$ und $\lim_{n \to \infty} (1-p)^n = 0$.

Definition 16. X heißt *geometrisch verteilt* mit Parameter $p \in]0,1]$, falls

$$\forall k \in \mathbb{N} : P(\{X = k\}) = p \cdot (1-p)^{k-1}.$$

Bez.: $X \sim \mathbf{G}(p)$.

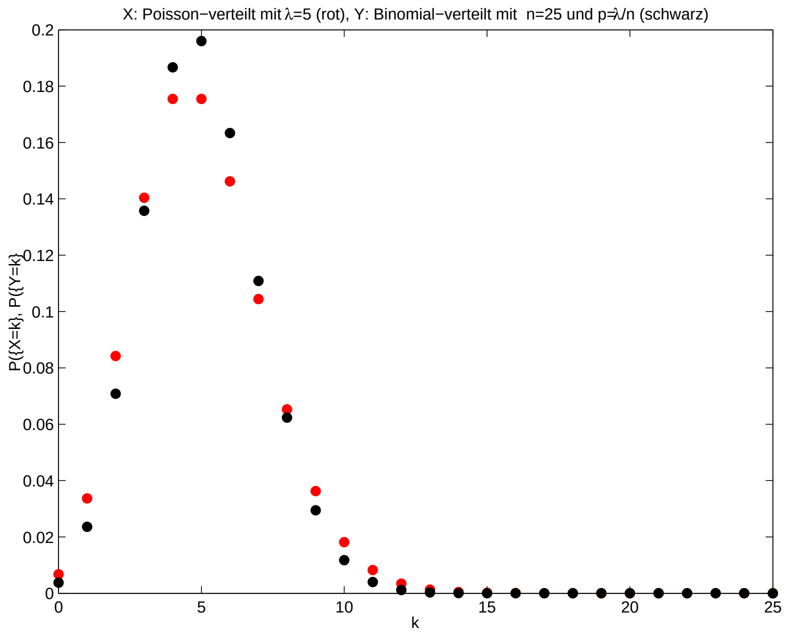

Abbildung III.8: Wahrscheinlichkeitsfunktionen zu $X \sim \mathbf{P}(5)$ (rot) und $Y \sim \mathbf{B}(n, 5/n)$ mit $n = 25$ (schwarz)

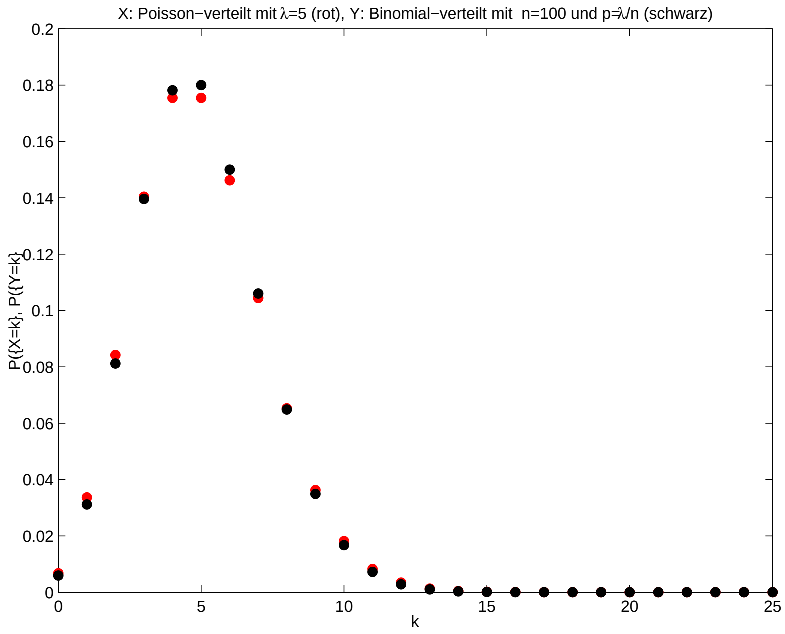

Abbildung III.9: Wahrscheinlichkeitsfunktionen zu $X \sim \mathbf{P}(5)$ (rot) und $Y \sim \mathbf{B}(n, 5/n)$ mit $n = 100$ (schwarz)

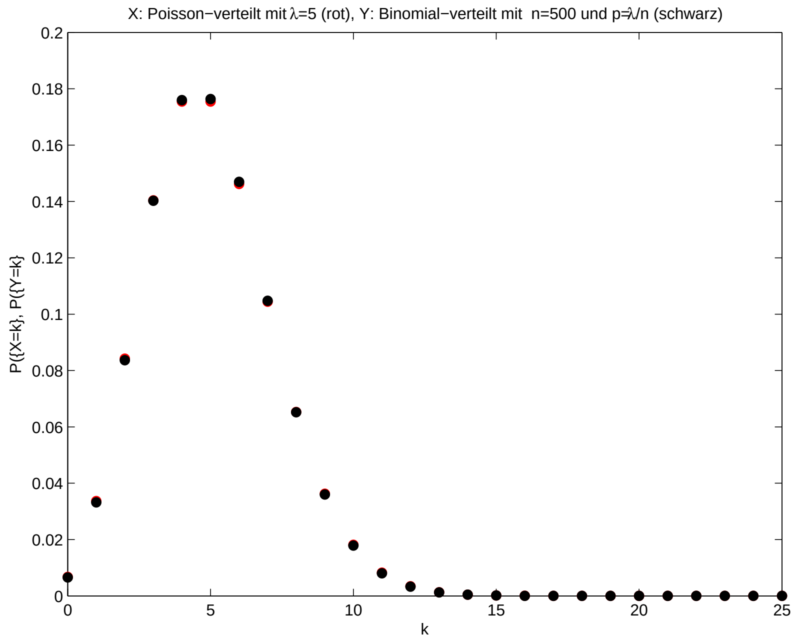

Abbildung III.10: Wahrscheinlichkeitsfunktionen zu $X \sim \mathbf{P}(5)$ (rot) und $Y \sim \mathbf{B}(n, 5/n)$ mit $n = 500$ (schwarz)

Bemerkung 17. Sei $p \in \,]0,1]$. Für iid Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$ sei

$$\tau_\infty(\omega) := \inf\{i \in \mathbb{N} : X_i(\omega) = 1\}.$$

Die Rechnung aus Beispiel 15 zeigt für $k \in \mathbb{N}$

$$P(\{\tau_\infty = k\}) = p \cdot (1-p)^{k-1},$$

so daß $\tau_\infty \sim \mathbf{G}(p)$. Beachte, daß $P(\{\tau_\infty = \infty\}) = 0$, da $\sum_{k=1}^{\infty} P(\{\tau_\infty = k\}) = 1$. Vgl. Beispiel II.1.3.

Bemerkung 18. Frage: Gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und darauf eine unendliche Folge $X_1, X_2, \dots$ von iid Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathbf{B}(1,p)$? Die Antwort ist positiv, siehe Bemerkung IV.2.6, aber der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum kann im nicht-trivialen Fall $0 < p < 1$ nicht diskret sein.

Letzteres ergibt sich wie folgt. Setze

$$S = \{\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} : \alpha_i \in \{0,1\}\}$$

sowie

$$X(\omega) = (X_1(\omega), \dots), \qquad \omega \in \Omega.$$

Aus

$$P(\{X = \alpha\}) \le P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = \alpha_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(\{X_i = \alpha_i\}) \le \max(p, 1-p)^n$$

folgt

$$P(\{X = \alpha\}) = 0.$$

Die Mengen $\{X = \alpha\}$ mit $\alpha \in S$ sind p.d. Ist Ω abzählbar, so gilt

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in S_0} \{X = \alpha\}$$

mit einer abzählbaren Menge $S_0 \subset S$. Damit ergibt sich der Widerspruch

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\alpha \in S_0} P(\{x = \alpha\}) = 0.$$

Definitionen und Bezeichnungen