Formelsammlung

Kapitel I:

Bayes'sche Formel:
$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)}.$$

Kapitel III:

Stichproben vom Umfang k aus $\{1,\ldots,n\}$	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
unter Beachtung der Reihenfolge	n^k	$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Symmetrische Bernoulli-Irrfahrt:

- falls X Anzahl der Runden, nach denen Spieler 1 führt, gilt für T gerade und $y \in \{0,\ldots,T/2\}$:
$$P(\{X = 2y\}) = P(\{S_{2y} = 0\}) \cdot P(\{S_{T-2y} = 0\}).$$
- falls Y maximaler Spielstand, gilt für $y \in \{0,\ldots,T\}$:
$$P(\{Y = y\}) = P(\{S_T = y\}) + P(\{S_T = y+1\}).$$

$X \sim \mathbf{H}(n, n_0, k)$:
$$P(\{X = \ell\}) = \frac{\binom{n_0}{\ell} \cdot \binom{n-n_0}{k-\ell}}{\binom{n}{k}},$$
$$\ell \in \{\max(0, k-(n-n_0)), \ldots, \min(n_0, k)\}.$$

$X \sim \mathbf{P}(\lambda)$:
$$P(\{X = k\}) = \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \; k \in \mathbb{N}_0.$$

X ist *arcussinus*-verteilt, wenn
$$F_X(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin\left(\sqrt{x}\right), \qquad x \in [0,1]$$
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(x(1-x))^{-1/2} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n$$

Kapitel V:

$X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$:
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$:
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda x), & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Faltungsformel:
$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v) f_Y(u-v)\, dv.$$

Kapitel VI:

	E(X)	Var(X)
$X \sim \mathbf{B}(n,p)$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
$X \sim \mathbf{G}(p)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$X \sim \mathbf{P}(\lambda)$	λ	λ
$X \sim \mathbf{U}([a,b])$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
$X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$X \sim \mathbf{N}(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

$$E(Y-(a^\star + b^\star \cdot X)) \leq E(Y-(a+b\cdot X))^2$$
$$b^\star = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}, \quad a^\star = E(Y) - b^\star \cdot E(X),$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$

Kapitel VII:
Hoeffdingsche Ungleichung:

$$P(\{|S_n/n - p| \geq \varepsilon\}) \leq 2 \cdot \exp(-2 \cdot \varepsilon^2 \cdot n)$$

Kapitel VIII:
Empirische Varianz:

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}_n^2 \right)$$

Zweiseitiger Gauß-Test: Ablehnung genau dann, wenn

$$|\bar{x}_n - \mu_0| \geq \sigma/\sqrt{n} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha/2).$$

$Y \sim \mathbf{M}(n, m, \mathbf{p})$:

$$P(\{Y=y\}) = \begin{cases} n! \cdot \prod_{k=1}^m \frac{p_k^{Y_k}}{y_k!}, & \text{falls } y \in \mathbb{N}_0^m \text{ mit } \sum_{k=1}^m y_k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Integrationstechniken:
Partielle Integration:

$$\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$$

Substitution:

$$\int_\alpha^\beta f(g(t)) g'(t)\, dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\, dx \qquad (g \text{ monoton})$$

Differentiation und Integration

Funktion f	Ableitung f'	Stammfunktion F	Definitionsbereich
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}, \alpha \neq -1$	$x > 0$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln(\|x\|)$	$x \neq 0$
e^{ax+b}	ae^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}, a \neq 0$	$\mathbb{R}$
xe^{ax+b}	$(1+ax)e^{ax+b}$	$\frac{ax-1}{a^2}e^{ax+b}, a \neq 0$	$\mathbb{R}$
x^2e^{ax+b}	$(2+ax)xe^{ax+b}$	$\frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}e^{ax+b}, a \neq 0$	$\mathbb{R}$
$a^{bx+c}, a > 0$	$b\ \ln(a)a^{bx+c}$	$\frac{1}{b\ \ln(a)}a^{bx+c}$	$\mathbb{R}$
$\ln(ax+b), a \neq 0$	$\frac{a}{ax+b}$	$\frac{1}{a}[(ax+b)\ln(ax+b)-(ax+b)]$	$ax+b > 0$

Quantile u_p der N(0,1)–Verteilung

p	0.750	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995
u_p	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.290