Einführung in die Stochastik

13. Übung

Gruppenübung: 23./24.06.2008

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 21 Wir betrachten ein statistisches Experiment, gegeben durch $(\Omega, \mathfrak{A}, P^\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ mit P^ϑ und $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Realisierung von X.
Analog zum Vorgehen in Abschnitt VIII.2. definieren wir die *Likelihood-Funktion* $L_x(\vartheta)$ gemäß

$$L_x(\vartheta) = P^\vartheta(\{X = x\}).$$

(i) Es gelte $X_1 \sim \mathbf{P}(\lambda)$. Geben Sie die Likelihood-Funktion an.

(ii) Wir betrachten das Schätzproblem $\gamma(\lambda) = \lambda$. Überlegen Sie, wie sich mit Hilfe der Likelihood-Funktion eine Schätzfunktion $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $\gamma(\lambda)$ bestimmen läßt und berechnen Sie diese.

(i) Aufgrund der Unabhängigkeit von $X_1, \ldots, X_n$ folgt

$$L_x(\lambda) = \prod_{i=1}^n P(\{X_i = x_i\}) = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod\limits_{i=1}^n x_i!}.$$

(ii) Wir verwenden als Schätzer für λ denjenigen Wert, für den die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Realisierung maximal ist, d.h. gesucht ist $\lambda > 0$, so daß

$$L_x(\lambda) = P(\{X = (x_1, \ldots,_n)\}) = \prod_{i=1}^n P(\{X_i = x_i\})$$

maximal wird. Aufgrund der strengen Monotonie der ln*-Funktionen ist die Maximalstelle von $L_x(\lambda)$ gleich der Maximalstelle von $\ell_x(\lambda)$. Somit*

$$\frac{d}{d\lambda}\ell_x(\lambda) = -n + \sum_{i=1}^n x_i \overset{!}{=} 0$$

mit Lösung $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

Es bleibt zu überprüfen, daß $\hat{\lambda}$ Maximalstelle ist. Wegen

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\ell_x(\lambda)\big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = -\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\lambda^2}\big|_{\lambda=\hat{\lambda}} < 0$$

folgt die Behauptung und es gilt

$$g_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Hinweis: *Eine Schätzfunktion, welche auf diese Art und Weise bestimmt wird, heißt* Maximum-Likelihood-Schätzer.

G 22 Sei g_n eine Schätzfunktion für γ und $R^\vartheta(g_n)$ bzw. $B^\vartheta(g_n)$ der Quadratmittelfehler bzw. Bias. Zeigen Sie:

(i) $R^\vartheta(g_n) = Var^\vartheta(g_n) + B^\vartheta(g_n)^2$

Wir betrachten nun ein statistisches Modell mit n unabhängigen auf $[0, \vartheta]$ gleichverteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Als Schätzfunktion für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$ wählen wir

$$g_n(x) = \max_{i=1,\ldots,n} \{x_i\}.$$

(ii) Zeigen Sie, daß $g_n(x)$ nicht erwartungstreu für γ ist und definieren Sie ein $c_n > 0$, so daß $h_n := c_n \cdot g_n$ eine erwartungstreue Schätzfunktion ist.

(iii) Verwenden Sie das arithmetische Mittel, um eine erwartungstreue Schätzfunktion m_n für γ zu konstruieren.
Berechnen Sie für g_n, h_n und m_n den Quadratmittelfehler und vergleichen Sie diese! Nutzen Sie Aussage (i)!

(i)

$$\begin{aligned}
R^\vartheta(g_n) &= E^\vartheta(g_n(X) - \gamma(\vartheta))^2 \\
&= E^\vartheta((g_n(X))^2) - 2E^\vartheta(g_n(X) \cdot \gamma(\vartheta)) + E^\vartheta((\gamma(\vartheta))^2) \\
&= E^\vartheta((g_n(X))^2) - (E^\vartheta(g_n(X)))^2 + (E^\vartheta(g_n(X)))^2 \\
&\quad - 2\gamma(\vartheta) E^\vartheta(g_n(X)) + E^\vartheta((\gamma(\vartheta))^2) \\
&= Var(g_n(X)) + (E^\vartheta(g_n(X)) - \gamma(\vartheta))^2 = Var(g_n(X)) + \Big(B^\vartheta(g_n)\Big)^2
\end{aligned}$$

(ii)Es gilt

$$\begin{aligned}
F^\vartheta_{g_n}(z) &= P(\{\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq z\}) \\
&= P(\{X_1 \leq z, X_2 \leq z, \ldots, X_n \leq z\}) \\
&= \prod_{i=1}^n F_i^\vartheta(z) = \left(\frac{z}{\vartheta}\right)^n.
\end{aligned}$$

Demzufolge lautet die Dichte

$$f^\vartheta_{g_n}(z) = \begin{cases} n\frac{z^{n-1}}{\vartheta^n} & z \in [0, \vartheta] \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Somit

$$E^\vartheta(g_n(X)) = \int_0^\vartheta z \cdot n \frac{z^{n-1}}{\vartheta^n} dz = \frac{n}{n+1}\vartheta \neq \vartheta.$$

Betrachten wir demnach die Funktion $h_n(x) = \frac{n+1}{n} g_n(x)$, so ist h_n erwartungstreu.

(iii) Wir wissen, daß für $X \sim \mathbf{U}[0, \vartheta]$ gilt: $E(X) = \frac{\vartheta}{2}$. Außerdem ist $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ eine erwartungstreue Schätzfunktion für $E(X) = \frac{\vartheta}{2}$. Also ist doch

$$m_n(x) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$.

Für die Berechnung des Quadratmittelfehlers nutzen wir die Formel aus (i). Dazu

$$E^\vartheta((g_n(X))^2) = \int_0^\vartheta z^2 \cdot n\frac{z^{n-1}}{\vartheta^n}dz = \frac{n}{n+2}\vartheta^2$$
$$Var^\vartheta(g_n(X)) = E^\vartheta((g_n(X))^2) - (E^\vartheta(g_n(X)))^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\vartheta^2$$

$$\begin{aligned} R^\vartheta(g_n) &= Var^\vartheta(g_n(X)) + B^\vartheta(g_n;\gamma) \\ &= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\vartheta^2 + (E^\vartheta(g_n(X)) - \gamma(\vartheta))^2 \\ &= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\vartheta^2 + \Big(\frac{n}{n+1}\vartheta - \vartheta\Big)^2 \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\vartheta^2 \end{aligned}$$

Da $h_n(x)$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\gamma(\vartheta)$ ist, folgt mit Bemerkung VIII.2.14

$$\begin{aligned} R^\vartheta(h_n) &= Var^\vartheta(h_n(X)) = Var^\vartheta(\frac{n+1}{n}g_n(X)) \\ &= (\frac{n+1}{n})^2 Var^\vartheta(g_n(X)) = (\frac{n+1}{n})^2\frac{n}{(n+1)^2(n+2)\vartheta^2} \\ &= \frac{1}{n(n+2)}\vartheta^2 \end{aligned}$$

$$R^\vartheta(m_n) = Var^\vartheta(m_n(X)) = \frac{4}{n^2}Var^\vartheta(\sum_{i=1}^n X_i)$$
$$= \frac{1}{3n}\vartheta^2$$

Für $n > 1$ gilt $R^\vartheta(h_n) < R^\vartheta(g_n)$ und $R^\vartheta(h_n) < R^\vartheta(m_n)$. Für $n > 3$ gilt $R^\vartheta(g_n) < R^\vartheta(m_n)$.

G 23 Vor einer Theaterkasse warten in einer Schlange 40 Personen, deren Bedienung im Mittel jeweils 50 Sekunden dauert. Es wird angenommen, daß sich die Bedienungszeiten durch unabhängige, identisch exponentialverteilte Zufallsvariablen beschreiben lassen. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle 40 Personen innerhalb von 35 Minuten bedient werden.

*Die Zufallsvariable X_i beschreibe die Bedienungsdauer der i-ten Person ($i = 1, \ldots, 40$). Dann kann $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ als unabhängige, identisch verteilte Folge angenommen werden. Aus $X_1 \sim$ **Exp**(λ) und $E(X_1) = 5/6$ folgt $\lambda = 6/5$ (s. Beispiel VI.6). Die Summe $S := X_1 + \ldots + X_{40}$ ist nach dem Zentralen Grenzwertsatz näherungsweise normalverteilt, und zwar mit den Parametern (verwende Beispiel VI.6)*

$$\mu = E(S) = 40E(X_1) = 33\,\frac{1}{3},$$
$$\sigma^2 = Var(S) = 40 \cdot Var(X_1) = 27\,\frac{7}{9}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} P(\{S \le 35\}) &\approx P\left(\left\{S^* \le \frac{35 - 33\,\frac{1}{3}}{\sqrt{27\,\frac{7}{9}}}\right\}\right) \\ &\approx \Phi(0.32) = 0.6255. \end{aligned}$$

Hausübung

H 49 Für ein $\vartheta > 0$ seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch $\mathbf{U}(\vartheta, 3\vartheta)$-verteilte Zufallsvariablen.

(i) Bestimmen Sie den Bias und die Varianz der folgenden Schätzfunktion für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$:

$$g_n(x) = \overline{x}_n/2.$$

(ii) Ist die Folge $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ stark konsistent?

(iii) Ist die Schätzfunktion

$$h_n(x) = (g_n(x))^2 = \frac{1}{4n^2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2$$

erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta^2$? Modifizieren Sie sie gegebenenfalls so, daß sich eine erwartungstreue Schätzfunktion ergibt.

(i) Es gilt mit den üblichen Argumenten

$$\begin{aligned} E^\vartheta(g_n(X)) &= \frac{1}{2}E^\vartheta(\overline{X}_n) = \frac{1}{2}E^\vartheta(X_1) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3\vartheta+\vartheta}{2} = \vartheta \;\Rightarrow B^\vartheta(g_n;\gamma) = 0 \quad \textit{erwartungstreu}, \\ Var^\vartheta(g_n(X)) &= \frac{1}{4}Var^\vartheta(\overline{X}_n) = \frac{1}{4n}Var^\vartheta(X_1) = \frac{1}{4n}\cdot\frac{(3\vartheta-\vartheta)^2}{12} = \frac{\vartheta^2}{12n}. \end{aligned}$$

(ii) Mit dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt für alle $\vartheta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(X) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\overline{X}_n = \frac{1}{2}\cdot E^\vartheta(X_1) = \frac{2\vartheta}{2} = \vartheta \quad P^\vartheta\text{-f.s.}$$

Somit ist die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark konsistent.

(iii) Wir verwenden die Ergebnisse aus Teilaufgabe a):

$$\begin{aligned} E^\vartheta(h_n(X)) &= E^\vartheta((g_n(X))^2) = Var^\vartheta(g_n(X)) + (E^\vartheta(g_n(X)))^2 \\ &= \frac{\vartheta^2}{12n} + \vartheta^2 = \frac{12n+1}{12n}\vartheta^2. \end{aligned}$$

Die Schätzfunktion h_n ist also nicht erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta^2$. Definieren wir

$$\tilde{h}_n(x) = \frac{12n}{12n+1}\,h_n(x),$$

erhalten wir eine erwartungstreue Schätzfunktion $\tilde{h}_n$.

H 50 Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt wie X mit

$$P^\vartheta(\{X=1\}) = \vartheta, \quad P^\vartheta(\{X=-1\}) = P^\vartheta(\{X=0\}) = P^\vartheta(\{X=2\}) = \frac{1-\vartheta}{3},$$

wobei $0 < \vartheta < 1$ der zu schätzende Parameter sei.

(i) Ist die Schätzfunktion

$$g_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n x_i - 1\right)$$

erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$?

(ii) Betrachten Sie die Schätzfunktion

$$h_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{1\}}(x_i),$$

also die relative Häufigkeit von Einsen in der Stichprobe. Ist diese Schätzfunktion erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$?

(iii) Welche der beiden Schätzfunktionen würden Sie vorziehen?

(iv) Berechnen Sie für g_n und h_n jeweils den konkreten Schätzwert für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$, falls 20 Wiederholungen des Zufallsexperiments 5 Nullen, 8 Einsen und 4 Zweien ergeben haben.

Wir berechnen für spätere Zwecke

$$\begin{aligned}
E^{\vartheta}(X_1) &= \sum_{x=-1}^{2} x \cdot P^{\vartheta}(\{X = x\}) \\
&= 1 \cdot \vartheta + \Big(-1 + 0 + 2\Big) \cdot \frac{1-\vartheta}{3} = \frac{2\vartheta + 1}{3}, \\
E^{\vartheta}(X_1^2) &= \sum_{x=-1}^{2} x^2 \cdot P^{\vartheta}(\{X = x\}) \\
&= 1 \cdot \left(\vartheta + \frac{1-\vartheta}{3}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1-\vartheta}{3}\right) = \frac{5 - 2\vartheta}{3}, \\
Var^{\vartheta}(X_1) &= E^{\vartheta}(X_1^2) - (E^{\vartheta}(X_1))^2 \\
&= \frac{5-2\vartheta}{3} - \frac{4\vartheta^2 + 4\vartheta + 1}{9} = \frac{14 - 10\vartheta - 4\vartheta^2}{9}.
\end{aligned}$$

(i) Wegen

$$E^{\vartheta}(g_n(X)) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} E^{\vartheta}(X_i) - 1\right) = \frac{1}{2}\left(3 \cdot \frac{2\vartheta+1}{3} - 1\right) = \vartheta$$

ist die Schätzfunktion g_n erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$.

(ii) Die Zufallsvariablen $1_{\{1\}}(X_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sind unabhängig und identisch $\mathbf{B}(1, p)$-verteilt mit $p = P(\{X_1 = 1\}) = \vartheta$. Deshalb gilt

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{1\}}(X_i) \ \sim \mathbf{B}(n, \vartheta)$$

und somit

$$E^{\vartheta}(h_n(X)) = \frac{1}{n}\, E^{\vartheta}(S_n) = \frac{n\vartheta}{n} = \vartheta.$$

Also ist auch h_n erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$.

(iii) Wir suchen nach der Schätzvariable mit der geringeren Varianz. Wir vergleichen also

$$Var^{\vartheta}(g_n(X)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{n} Var^{\vartheta}(X_1) = \frac{14 - 10\vartheta - 4\vartheta^2}{4n}$$

mit

$$Var^{\vartheta}(h_n(X)) = \frac{1}{n^2} \cdot Var^{\vartheta}(S_n) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{14 - 10\vartheta - 4\vartheta^2}{4n} &> \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n} \\ \Leftrightarrow\ 14 - 10\vartheta - 4\vartheta^2 &> 4\vartheta - 4\vartheta^2 \\ \Leftrightarrow\ 14 &> 14\vartheta \\ \Leftrightarrow\ 1 &> \vartheta \end{aligned}$$

gilt für alle $\vartheta \in \Theta =]0,1[$*:*

$$Var^{\vartheta}(h_n(X)) < Var^{\vartheta}(g_n(X)).$$

Somit ist h_n *vorzuziehen. Für festes* ϑ *nimmt die Varianz mit größerem Stichprobenumfang* n *im selben Maße ab (Asymptotik wie* $1/n$*). Deshalb ist der Unterschied zwischen beiden Schätzfunktionen als gering einzustufen.*

(iv) Wir erhalten

$$g_{20}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{20}\cdot(-3+8+4\cdot 2) - 1\right) = \frac{19}{40} = 0.475,$$

$$h_{20}(x) = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 1_{\{1\}}(X_i) = \frac{8}{20} = 0.4.$$

H 51 Wir betrachten eine Folge $X_1, \ldots, X_n$ von iid Zufallsvariablen mit

$$X_1 \sim \mathbf{U}([\vartheta - 1/2, \vartheta + 1/2]),$$

mit $\vartheta \in \Theta = \mathbb{R}$ sowie die Schätzfunktion

$$g_n(x) = \frac{\max\{x_1, \ldots, x_n\} + \min\{x_1, \ldots, x_n\}}{2}$$

für $E^{\vartheta}(X_1)$.
Zeigen Sie, daß g_n erwartungstreu ist und daß gilt

$$\forall \vartheta \in \Theta:\ R^{\vartheta}(g_n) < R^{\vartheta}(\bar{X}_n).$$

Hinweis: Für $Y := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $Z := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ gilt:

$$Var(Y) = Var(Z) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

Wegen

$$E^{\vartheta}(g_n(X)) = \frac{1}{2}(E^{\vartheta}(\max_{i=1,\ldots,n}\{X_i\}) + E^{\vartheta}\min_{i=1,\ldots,n}\{X_i\}))$$

müssen wir als erstes die Verteilungsfunktionen bzw. Dichten von

$$Y := \max_{i=1,\ldots,n}\{X_i\} \qquad \textit{und } Z := \min_{i=1,\ldots,n}\{X_i\}$$

bestimmen. Es folgt

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < \vartheta - 1/2 \\ (y - \vartheta + 1/2)^n & \vartheta - 1/2 \le y \le \vartheta + 1/2 \\ 1 & y > \vartheta + 1/2 \end{cases}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < \vartheta - 1/2 \\ 1 - (1/2 - z + \vartheta)^n & \vartheta - 1/2 \le z \le \vartheta + 1/2 \\ 1 & z > \vartheta + 1/2, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(\{\min\{X_1, \dots, X_n\} \le z\}) = 1 - P(\{\min\{X_1, \dots, X_n\} \ge z\}) \\ &= 1 - P(\{X_1 \le z, X_2 \le z, \dots, X_n \le z\}) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} F_Z(z). \end{aligned}$$

Also gilt

$$f_Y(y) = \begin{cases} n(y - \vartheta + 1/2)^{n-1} & \vartheta - 1/2 \le y \le \vartheta + 1/2 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} n(1/2 - z + \vartheta)^{n-1} & \vartheta - 1/2 \le z \le \vartheta + 1/2 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$\begin{aligned} E(Y) &= n \int_{\vartheta-1/2}^{\vartheta+1/2} y(y - \vartheta + 1/2)^{n-1} dy \\ &= n \int_0^1 (t + \vartheta - 1/2) t^{n-1} dt \qquad \textit{Subst.: } t = y - \vartheta + 1/2 \\ &= \frac{n}{n+1} + \vartheta - 1/2 \\ E(Z) &= n \int_{\vartheta-1/2}^{\vartheta+1/2} z(1/2 - z + \vartheta)^{n-1} dz \\ &= n \int_0^1 (1/2 + \vartheta - t) t^{n-1} dt \qquad \textit{Subst.: } t = 1/2 - z + \vartheta \\ &= (1/2 + \vartheta) - \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Wir erhalten für den Erwartungswert von $g_n(X)$:

$$E(g_n(X)) = \frac{1}{2}\Big(\frac{n}{n+1} + \vartheta - 1/2 + 1/2 + \vartheta - \frac{n}{n+1}\Big) = \vartheta.$$

Um zu beweisen, daß $R^\vartheta(g_n) < R^\vartheta(g_n^\star)$, brauchen wir uns wegen der Erwartungstreue der g_n und $g_n^\star$ nur die entsprechenden Varianzen anzuschauen.

Es gilt:

$$Var(g_n(X)) = 1/4(Var(Y) + Var(Z) + 2(E(YZ) - E(Y)E(Z)))$$

Die Erwartungswerte von Y und Z kennen wir aus Teil (i). Die Varianzen von Y und Z sind im Hinweis gegeben. Es bleibt also, $E(YZ)$ zu berechnen. Wir benutzen

$$P(\{Y \leq y, Z \leq z\}) = P(\{Y \leq y\}) - P(\{Y \leq y, Z > z\})$$

um die gemeinsame Dichte von Y und Z zu berechnen:

$$\begin{aligned} P(\{Y \leq y, Z \geq z\}) &= (P(\{z \leq X_1 \leq y\}))^n \\ &= (y-z)^n \qquad \vartheta - 1/2 \leq z \leq y \leq \vartheta + 1/2. \end{aligned}$$

Damit gilt für $y \geq z$

$$P(\{Y \leq y, Z \leq z\}) = \begin{cases} (y-\vartheta+1/2)^n - (y-z)^n & \vartheta - 1/2 \leq z \leq y \leq \vartheta + 1/2 \\ 1 & \vartheta + 1/2 \leq z \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

bzw. für $y < z$

$$P(\{Y \leq y, Z \leq z\}) = P(\{Y \leq y, Z \leq y\})$$

und es folgt

$$\begin{aligned} f_{Y,Z}(y,z) &= \frac{d^2}{dydz} P(\{Y \leq y, Z \leq z\}) \\ &= \begin{cases} n(n-1)(y-z)^{n-2} & \vartheta - 1/2 \leq z \leq y \leq \vartheta + 1/2 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(YZ) &= \int_{\vartheta-1/2}^{\vartheta+1/2} \int_z^{\vartheta+1/2} yzn(n-1)(y-z)^{n-2} dydz \\ &= \int_{\vartheta-1/2}^{\vartheta+1/2} (\vartheta+1/2)nz(\vartheta+1/2-z)^{n-1} dz \\ &\quad - \int_{\vartheta-1/2}^{\vartheta+1/2} z(\vartheta+1/2-z)^n dz \qquad \textit{(part. Int. bzgl. } y\textit{)} \\ &= \vartheta^2 + \frac{2-n}{4(n+2)} \\ &= \vartheta^2 - \frac{n-2}{4(n+2)}. \end{aligned}$$

Wir schlußfolgern

$$Var(g_n(X)) = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

Wegen $Var(\bar{X_n}) = \frac{1}{12n}$ folgt, daß $Var(g_n(X)) < Var(g_n^\star(X))$ für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$.