Einführung in die Stochastik

12. Übung

Gruppenübung: 16./17.06.2008

Abgabe Hausübung: 23./24.06.2008

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 19 Mit X_n wird die Anzahl der geworfenen 6 in einer Serie von n unabhängigen Würfen mit einem Würfel bezeichnet.

(i) Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt X_n?

(ii) Für $\varepsilon = 0.01$ bestimme man eine Anzahl n_0 von unabhängigen Würfen, so daß

$$P\left(\left\{\left|\frac{X_{n_0}}{n_0} - \frac{1}{6}\right| \leq 0.01\right\}\right) \geq 0.5$$

gilt, sowohl mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung, der Hoeffdingschen Ungleichung (Vgl. Vorlesung Satz VII.1.5) als auch approximativ mittels des Zentralen Grenzwertsatzes.

(i) $X_n \sim \mathbf{B}(n, \frac{1}{6})$
(ii) Wegen (i) gilt $E(X_n) = \frac{n}{6}$ *und* $Var(X_n) = \frac{5}{36}n$.
Tschebyscheffsche Ungleichung:

$$\begin{aligned} P\Big(\Big\{\Big|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\Big| \leq 0.01\Big\}\Big) &= 1 - P\Big(\Big\{\Big|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\Big| > 0.01\Big\}\Big) \\ &= 1 - P(\{|X_n - \frac{n}{6}| > 0.01n\}) \\ &\geq 1 - \frac{\frac{5}{36}n}{0.01^2 n^2} \end{aligned}$$

Wir müssen also die folgende Ungleichung nach n *auflösen*

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\frac{5}{36}}{0.01^2 n} &\geq 0.5 \\ n &\geq 2778 \end{aligned}$$

Hoeffdingsche Ungleichung:

$$\begin{aligned} P\Big(\Big\{\Big|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\Big| \leq 0.01\Big\}\Big) &= 1 - P\Big(\Big\{\Big|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\Big| \geq 0.01\Big\}\Big) \\ &\geq 1 - 2\exp\{-2 \cdot 0.01^2 \cdot n\} \overset{!}{\geq} 0.5 \\ n &\geq 6932 \end{aligned}$$

Zentraler Grenzwertsatz

$$\begin{aligned} P\Big(\Big\{\Big|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\Big| \leq 0.01\Big\}\Big) &= P\Big(\Big\{\Big|X_n - \frac{n}{6}\Big| \leq 0.01n\Big\}\Big) \\ &= P\Big(\Big\{\frac{|X_n - \frac{n}{6}|}{\sqrt{\frac{5}{36}n}} \leq \frac{0.01n}{\sqrt{\frac{5}{36}n}}\Big\}\Big) \\ &= P\Big(\Big\{\frac{-0.01}{\sqrt{\frac{5}{36}n}} \leq \frac{X_n - \frac{n}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36}n}} \leq \frac{0.01n}{\sqrt{\frac{5}{36}n}}\Big\}\Big) \\ &= 2\Phi\Big(\frac{0.01n}{\sqrt{\frac{5}{36}n}}\Big) - 1 \\ &\overset{!}{\geq} 0.5 \end{aligned}$$

Wir müssen demnach das 0.75-Quantil der Standardnormalverteilung bestimmen (mit Tabelle)

$$\frac{0.06\sqrt{n}}{\sqrt{5}} \geq 0.68$$
$$n = 643.$$

G 20 Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen mit

$$P(\{X_1 = 18\}) = 0.2, \qquad P(\{X_1 = 13\}) = 0.8.$$

Zeigen Sie:

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = 14\right\}\right) = 1.$$

Wir definieren eine Folge $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen mit

$$Z_i := \frac{X_i - 13}{5},$$

dann gilt

$$P(\{Z_i = 0\}) = 0.8 \qquad \textit{und} \qquad P(\{Z_i = 1\}) = 0.2$$

Die Folge $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist iid mit $Z_1 \sim \mathbf{B}(1, 0.2)$. Unter Verwendung von Satz 7, Kapitel IV, folgt:

$$\begin{aligned}
1 &= P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i(\omega) = 0.2\}) \\
&= P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(\omega) - 13}{5} = 0.2\}) \\
&= P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = 14\}).
\end{aligned}$$