Einführung in die Stochastik

11. Übung

Gruppenübung: 09./10.06.2008

Abgabe Hausübung: 16./17.06.2008

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 17 Gegeben seien Punkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n$. Betrachten Sie diskrete Zufallsvariablen X, Y mit gemeinsamer Verteilung

$$P(\{(X,Y) = (x_i, y_i)\}) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Bestimmen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ sowie $Cov(X,Y)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_x xP(\{X = x\}) = \sum_x \frac{|\{(x_j, y_j) : x_j = x, \, j \in 1, \ldots, n\}|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \\
E(Y) &= \sum_y yP(\{Y = y\}) = \sum_y \frac{|\{(x_j, y_j) : y_j = y, \, j \in 1, \ldots, n\}|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i = \bar{y} \\
E(X^2) &= \sum_{x_i} x_i^2 P(\{X = x_i\}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 \\
E(Y^2) &= \sum_{y_i} y_i^2 P(\{Y = y_i\}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i^2 \\
Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
Var(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i
\end{aligned}$$

G 18 Zeigen Sie: Aus

$$\forall \varepsilon > 0 : \qquad \lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0 \ (X_n \text{ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen } X)$$

folgt nicht

$$P(\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}) = 1 \ (X_n \text{ konvergiert fast sicher gegen } X).$$

Hinweis: Wählen Sie $\Omega = [0,1]$, P Lebesguemaß auf Ω und $X_n = 1_{A_n}$ für geeignete A_n.

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = [0,1]$, der zugehörigen Borel-σ-Algebra und $P = \lambda$, wobei λ Lebesguemaß, d.h. $\lambda([a,b]) = b - a$ für $a, b \in [0,1]$. Wir definieren eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n := \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

und setzen

$$A_n := \{x - \lfloor x \rfloor \ : \ x \in [a_{n-1}, a_n]\}, \qquad n \geq 1.$$

Als Folge von Zufallsvariablen definieren wir nun $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $X_n = 1_{A_n}$.

Dann konvergiert X_n *in Wahrscheinlichkeit gegen 0: Für* $\varepsilon \in (0,1)$ *gilt nämlich*

$$P(\{|X_n| > \varepsilon\}) = P(\{A_n\}) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Andererseits findet man für jedes $\omega \in \Omega$ *und jedes* $n \in \mathbb{N}$ *zwei natürliche Zahlen* $n_1, n_2 \geq n$, *so dass* $\omega \in A_{n_1}$ *und* $\omega \notin A_{n_2}$. *Es folgen somit für alle* $\omega \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \sup X_n(\omega) = 1 \qquad \textit{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \inf X_n(\omega) = 0,$$

und X_n *konvergiert damit NICHT fast sicher gegen 0.*