Einführung in die Stochastik
10. Übung
Gruppenübung: 02.06.2008
Abgabe Hausübung: 09.06.2008
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 15 Wir betrachten folgendes Würfelexperiment:
Man würfelt so lange, bis jede der Zahlen $1, \ldots, 6$ mindestens einmal vorgekommen ist.

(i) Wie groß ist der Erwartungswert der Zahl der benötigten Würfe?

(ii) Sei X_2 die Anzahl der Würfe, bis das zweite verschiedene Wurfergebnis kommt und X_3 die Anzahl der Würfe, bis das dritte verschiedene Wurfergebnis kommt. Welche Varianz besitzt $X_3 - X_2$?

(i) Sei X_i, $i = 1, \ldots, 6$ die Anzahl der Würfe, bis die i-te verschiedene Zahl erscheint ($X_1 = 1$). Und sei $Y_1 = 1$, $Y_i = X_i - X_{i-1}$, $i = 2, \ldots, 6$ die Differenz zweier aufeinanderfolgender X_i.

Ist gerade die $(i-1)$-te verschiedene Zahl gefallen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Wurf eine noch nicht geworfene Zahl zu erhalten

$$p_i = \frac{(6 - (i - 1))}{6}.$$

Y_i ist demnach geometrisch verteilt mit Parameter p_i. Wegen $X_6 = \sum_{i=1}^{6} Y_i$ erhalten wir für die erwartete Gesamtzahl der Würfe (beachte: $Z \sim \mathbf{G}(p)$, dann $E(Z) = 1/p$)

$$E(X_6) = E(Y_1) + E(Y_2) + \ldots + E(Y_6) = 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \ldots + \frac{6}{1} = 14.7.$$

(ii) Ist $Z \sim \mathbf{G}(p)$, dann $Var(Z) = (1-p)/p^2$. Daher

$$Var(Y_3) = \frac{1 - p_3}{p_3^2} = \frac{1 - \frac{6-(3-1)}{6}}{(\frac{6-(3-1)}{6})^2} = \frac{3}{4}.$$

G 16 Sei $X \sim \mathbf{U}([-1, 1])$ und $Y = |X|$.

(i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y. Welche Ihnen bekannte Verteilung besitzt Y?

(ii) Sind X und Y unkorreliert?

(iii) Sind X und Y unabhängig?

(i) Für $y < 0$ gilt $F_Y(y) = 0$. Im Fall $y \in [0, 1]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\{|X| \leq y\}) = P(\{-y \leq X \leq y\}) = F_X(y) - F_X(-y) \\ &= (y+1)/2 - ((-y+1)/2) = y. \end{aligned}$$

Für $y > 1$ erhält man direkt $F_Y(y) = 1$. Insgesamt folgt also $Y \sim \mathbf{U}([0, 1])$.

(ii) Wir prüfen, ob $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ gilt. Zunächst folgt aus Beispiel VI.6 $E(X) = 0$ und $E(Y) = 1/2$. Nach Lemma VI.13 folgt (vgl. auch Bsp. V.30)

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot |x| \cdot f(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} (-x^2) \cdot \frac{1}{2}\, dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{2}\, dx \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0, \end{aligned}$$

d.h. X *und* Y *sind unkorreliert.*

(iii) X *und* Y *sind nicht unabhängig, denn:*

$$\begin{aligned} P(\{X \geq 1/2, Y \geq 1/2\}) &= P(\{X \geq 1/2\}) = 1/4 \\ &\neq 1/8 = 1/4 \cdot 1/2 = P(\{X \geq 1/2\}) \cdot P(\{Y \geq 1/2\}). \end{aligned}$$

Hinweis: *Damit haben wir ein Gegenbeispiel, daß aus Unkorreliertheit nicht Unabhängigkeit folgt.*