Einführung in die Stochastik

9. Übung

Gruppenübung: 26.05.2008

Abgabe Hausübung: 02.06.2008

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 13 Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) sei gleichverteilt auf dem Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0), (0,1)$.

1. Bestimmen Sie die Randverteilungen P_X und P_Y.
2. Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?
3. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Z, die gegeben ist als $Z = X + Y$

Die Verteilung des Vektors hat die Dichte:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2 & , \textit{ falls } 0 \leq x \leq 1 \textit{ und } 0 \leq y \leq 1-x \\ 0 & , \textit{ sonst.} \end{cases}$$

Definiere

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \textit{ und } 0 \leq y \leq 1-x\}$$

1. *Nach Lemma V.2.17 aus der Vorlesung erhält man die Dichte f_X der Zufallsvariablen X aus*

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy.$$

Berechnung des Integrals:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy \\ = & \int_{\mathbb{R}} 2 \cdot 1_A(x,y)dy = \int_0^{1-x} 2 \cdot 1_{[0,1]}(x)dy = 2 \cdot (1-x) \cdot 1_{[0,1]}(x). \end{aligned}$$

Analog für f_Y:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1_A(x,y)dx = \int_0^{1-y} 2 \cdot 1_{[0,1]}(y)dx = 2 \cdot (1-y) \cdot 1_{[0,1]}(y). \end{aligned}$$

Die Randverteilungen sind somit gegeben durch

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx \text{ bzw. } P(Y \in B) = \int_B f_Y(y)dy \textit{ für } B \in \mathcal{B}_2.$$

2. *Wegen*

$$f_{(X,Y)}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 \neq \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} = f_X\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f_Y\left(\frac{2}{3}\right),$$

sind X und Y nicht unabhängig, da $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ein Stetigkeitspunkt von $f_{(X,Y)}$ ist, $\frac{1}{3}$ Stetigkeitspunkt von f_X ist und $\frac{2}{3}$ Stetigkeitspunkt von f_Y ist.

3. ***Fall** $t < 0$: Da für alle $(x,y) \in A$ gilt, dass $x + y \geq 0$ ist, folgt*

$$P(\{X + Y < t\}) = 0, \textit{ falls } t < 0.$$

***Fall** $t > 1$: Wegen $x + y \leq 1$ für alle $(x,y) \in A$ folgt*

$$P(\{X + Y < t\}) = 1, \textit{ falls } t > 1.$$

Fall $0 \le t \le 1$**:** *$0 \le x \le t$ impliziert $0 \le y \le t - x$. Aus dieser Beobachtung erhalten wir*

$$\begin{aligned} P(\{X + Y < t\}) &= \int_0^t \int_0^{t-x} f_{(X,Y)}(x, y) dy dx \\ &= \int_0^t 2(t - x) dx = 2(t^2 - \frac{t^2}{2}) = t^2. \end{aligned}$$

Dies liefert

$$P(\{X + Y < t\}) = t^2, \text{ falls } 0 \le t \le 1.$$

Insgesamt erhalten wir

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } t < 0 \\ t^2 & , \text{ falls } 0 \le t \le 1 \\ 1 & , \text{ falls } t > 1. \end{cases}$$

als Verteilungsfunktion von $X + Y$.

G 14 Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) sei absolutstetig verteilt mit der Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Dichten f_X und f_Y sowie die Verteilungsfunktionen F_X und F_Y.

(ii) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?

(iii) Berechnen Sie $P(\{X \le Y\})$.

(i) Es gilt

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) = \int_0^x \int_0^1 f(s, t) dt ds.$$

$$\Longrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{3}y & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Da (X, Y) stetig verteilt ist, erhalten wir f_X und f_Y durch Differentiation der Randverteilungsfunktionen:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{3}y + \frac{1}{3} & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}.$$

(ii) Betrachten wir $f(x, y)$ zum Beispiel an der Stelle $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$:

$$f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$f_X(\frac{1}{3}) \cdot f_Y(\frac{1}{3}) = (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3}) \cdot (\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{56}{81}.$$

Damit ist klar, daß X *und* Y *nicht unabhängig sind, aufgrund der Stetigkeit von* f, f_X, f_Y *in den entsprechenden Punkten.*

(iii)

$$\begin{aligned} P(\{X \leq Y\}) &= \int_0^1 \int_0^y (\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y)dxdy \\ &= \int_0^1 \frac{5}{3}y^2 dy \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$