Einführung in die Stochastik
8. Übung
Gruppenübung: 19./20.05.2008
Abgabe Hausübung: 26./27.05.2008
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 11 Seien X und X_n, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{N}$. Mit F_X und F_{X_n} seien die zugehörigen Verteilungsfunktionen bezeichnet. Zeigen Sie: Gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{X_n = k\}) = P(\{X = k\}),$$

so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

Wähle $x \in \mathbb{R}$, dann

$$F_{X_n}(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} P(\{X_n = k\}), \quad F_X(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} P(\{X = k\}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} P(\{X_n = k\}) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \lim_{n\to\infty} P(\{X_n = k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} P(\{X = k\}) = F_X(x) \end{aligned}$$

G 12 Seien X_1 und X_2 Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Die gemeinsame Verteilung $P_{(X_1,X_2)}$ von X_1 und X_2 sei durch folgendes Tableau gegeben:

X_2 \ X_1	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$

(i) Bestimmen Sie die Randverteilungen P_{X_1} und P_{X_2}.

(ii) Sind X_1 und X_2 unabhängig?

(iii) Bestimmen Sie $P(\{X_1 \leq 2\})$.

(iv) Bestimmen Sie $P(\{X_1 \leq X_2\})$.

(i) Die Randverteilungen ergeben sich als jeweilige Spalten- bzw. Zeilensumme.

$$P(\{X_1 = 1\}) = \frac{5}{36}, \; P(\{X_1 = 2\}) = \frac{19}{36}, \; P(\{X_1 = 3\}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\{X_2 = 1\}) = \frac{1}{4}, \; P(\{X_2 = 2\}) = \frac{14}{45}, \; P(\{X_2 = 3\}) = \frac{79}{180}$$

(ii) Für die Unabhängigkeit von X und Y müßte gelten

$$P(\{X_1 = x\}, \{X_2 = y\}) = P(\{X_1 = x\}) \cdot P(\{X_2 = y\}).$$

Wie wir jedoch mit (i) leicht sehen, gilt:

$$P(\{X_1 = 1\}) \cdot P(\{X_2 = 2\}) = \frac{7}{162} \neq 0 = P(\{X_1 = 1\}, \{X_2 = 2\}).$$

(iii)

$$P(\{X_1 \leq 2\}) = P(\{X_1 = 1\}) + P(\{X_1 = 2\}) = \frac{2}{3}$$

(iv)

$$P(\{X_1 \leq X_2\}) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=i}^{3} P(\{X_1 = i\}, \{X_2 = j\}) = \frac{57}{90} = \frac{19}{30}$$