Einführung in die Stochastik
6. Übung
Gruppenübung: 05.05.2008
Abgabe Hausübung: 13.05.2008
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 8 Sei $n_0(n) \in \{0, 1 \ldots, n\}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_0(n)}{n} = p \in (0, 1).$$

Des Weiteren betrachten wir eine Folge von Zufallsvariabeln X_n mit $X_n \sim H(n, n_0(n), k)$. Zeigen Sie für $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$:

$$\lim_{n\to\infty} P(\{X_n = \ell\}) = \binom{k}{\ell} p^\ell (1-p)^{k-\ell}.$$

Wir benutzen die Abkürzung $n_0 := n_0(n)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n_0}{l}\binom{n-n_0}{k-l}}{\binom{n}{k}} &= \frac{n_0!(n-n_0)!(n-k)!k!}{(n_0-l)!(n-n_0-k+l)!n!l!(k-l)!} \\
&= \frac{n_0!(n-n_0)!(n-k)!}{(n_0-l)!n!(n-n_0-k+l)!} \cdot \binom{k}{l} \\
&= \frac{n_0!}{(n_0-l)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \cdot \frac{(n-n_0)!}{(n-n_0-k+l)!} \cdot \binom{k}{l} \\
&= \frac{[(n_0-l+1)\cdot\ldots\cdot n_0]\cdot[(n-n_0-k+l+1)\cdot\ldots\cdot(n-n_0)]}{(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n} \cdot \binom{k}{l} \\
&= \frac{(n_0-l+1)}{n-k+1} \cdot\ldots\cdot \frac{n_0}{n-k+l} \cdot \frac{(n-n_0-k+l+1)}{(n-k+l+1)} \cdot\ldots\cdot \frac{(n-n_0)}{n} \cdot \binom{k}{l} \\
&= (*)
\end{aligned}$$

Wegen $\frac{n_0(n)}{n} \to p$ *für* $n \to \infty$ *folgt:*

$$\lim_{n\to\infty} (*) \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_0}{n}\right)^\ell \cdot \left(1 - \frac{n_0}{n}\right)^{k-\ell} \binom{k}{l} \;=\; p^\ell \cdot (1-p)^{k-\ell} \binom{k}{l}.$$

G 9 Zur Feststellung der Anzahl N der in einem bestimmten Revier lebenden Rothirsche wurden in einer Fangaktion insgesamt 7 Tiere gefangen und gekennzeichnet. Anschließend wurden die gefangenen Tiere im gleichen Revier wieder freigelassen. Nach einer gewissen Zeit wurde eine weitere Fangaktion durchgeführt. Dabei wurden m Rothirsche gefangen und man stellte fest, dass genau $k\,(k \leq m)$ gefangene Tiere gekennzeichnet waren. Es wird angenommen, dass zwischen beiden Fangaktionen keine Zu- oder Abwanderungen von Rothirschen in dem beobachteten Revier stattgefunden haben.

(i) Sei X die Zufallsvariable, welche die Anzahl der gefangenen und markierten Rothirsche in der zweiten Fangaktion angibt. Welche Verteilung hat X?

(ii) Sei $m = 3$ und $k = 2$. Welche Anzahl N an Rothirschen im betrachteten Revier ist am wahrscheinlichsten?

(i) X ist hypergeometrisch verteilt mit den Parametern: $n = N$, $n_0 = 7, m$; $X \sim H(N, 7, m)$.
(ii) Wir suchen jenes $N \in \mathbb{N}$, *für welches* $P(X = 2)$ *mit* $X \sim H(N, 7, m)$ *maximal wird:*

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= \frac{\binom{7}{2}\binom{N-7}{1}}{\binom{N}{3}} \\
&= \frac{126 \cdot (N-7)}{N(N-1)(N-2)}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Differenz zwischen $P(X_1 = 2)$ *für* $X_1 \sim H(N,7,m)$ *und* $P(X_2 = 2)$ *für* $X_2 \sim H(N+1,7,m)$:

$$\begin{aligned}
\frac{126 \cdot (N-7)}{N(N-1)(N-2)} - \frac{126 \cdot (N-6)}{(N+1)N(N-1)} &\overset{!}{>} 0 \\
-126 \cdot (6N+7) + 126 \cdot (8N-12) &> 0 \\
N &> \frac{19}{2}.
\end{aligned}$$

Es ist also zu vermuten, daß sich 10 Rothirsche im Revier befinden.

Anderer Weg: Über Einsetzen möglicher Werte für N:
Es ist offensichtlich, daß $N > 7$; *deshalb*

$$\begin{aligned}
X \sim H(8,7,3):&\quad P(X=2) = \frac{3}{8} \\
X \sim H(9,7,3):&\quad P(X=2) = \frac{1}{2} \\
X \sim H(10,7,3):&\quad P(X=2) = \frac{21}{40} \\
X \sim H(11,7,3):&\quad P(X=2) = \frac{28}{55}
\end{aligned}$$

Auch hieraus läßt sich die Vermutung ableiten, daß sich 10 Rothirsche im Revier befinden.
Beide Ansätze zeigen allerdings nicht, dass es sich wirklich um ein Maximum handelt. Dazu betrachtet man die Funktion

$$f(x) = \frac{126 \cdot (x-7)}{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)},$$

und bestimmt das Maximum wie üblich mit Hilfe der Ableitung. Dies führt allerdings im vorliegenden Fall auf relativ unangenehme Rechnungen.