Einführung in die Stochastik
5. Übung
Gruppenübung: 28.04.2008
Abgabe Hausübung: 05.05.2008
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 7 Im folgenden sei $\Omega' \neq \emptyset$ eine abzählbare Menge, auf der wir eine Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$g : \Omega' \to \mathbb{R}_+$$

betrachten. Ferner sei für jedes $\omega' \in \Omega'$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$g_{\omega'} : \Omega' \to \mathbb{R}_+$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, daß

$$f(\omega) := g(\omega_0) \cdot g_{\omega_0}(\omega_1) \cdot g_{\omega_1}(\omega_2) \cdots g_{\omega_{n-1}}(\omega_n), \qquad \omega = (\omega_0, \ldots, \omega_n) \in \Omega$$

eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf $\Omega = (\Omega')^{n+1}$ definiert.

(ii) Lesen Sie Aufgabe H19(i) und modellieren Sie dann durch geeignete Wahl von Ω', g und $g_{\omega'}$ folgendes Warteschlagenproblem:
Ein Skilft kann in einer Zeitscheibe genau einen wartenden Skifahrer aufnehmen. pro Zeitscheibe trifft/treffen mit Wahrscheinlichkeit

$p_0 > 0$ kein neuer Skifahrer am Lift ein,
$p_1 > 0$ ein neuer Skifahrer am Lift ein,
$p_2 > 0$ zwei neue Skifahrer am Lift ein.

Es gilt $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, und das Eintreffen der Skifahrer in verschiedenen Zeitscheiben geschieht unabhängig. Zu Betriebsbeginn warten bereits 5 Skifahrer vor dem Lift. Gesucht ist ein stochastisches Modell für die Längen $X_0, \ldots, X_n$ der Warteschlangen.

(i) Klar: $f \geq 0$. Ferner per Induktion:

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) &= \sum_{\omega \in \Omega} g(\omega_0) \cdot g_{\omega_0}(\omega_1) \cdot g_{\omega_1}(\omega_2) \cdots g_{\omega_{n-1}}(\omega_n) \\
&= \sum_{\omega_0 \in \Omega'} g(\omega_0) \underbrace{\sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n) \in (\Omega')^n} g_{\omega_0}(\omega_1) \cdot g_{\omega_1}(\omega_2) \cdots g_{\omega_{n-1}}(\omega_n)}_{=1, \text{ für alle } \omega_0 \in \Omega'_{nachInd.ann.}} \\
&\ \ \vdots \\
&= \sum_{\omega_0 \in \Omega'} g(\omega_0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(ii) $\Omega' = \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$

$$g(\omega_0) = \begin{cases} 1 & \omega_0 = 5 \\ 0 & \textit{sonst}, \end{cases}$$

$$g_{\omega'}(\omega) = \begin{cases} p_0 & \omega = \omega' \\ p_1 & \omega = \omega' + 1 \\ p_2 & \omega = \omega' + 2 \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$