Einführung in die Stochastik

4. Übung

Gruppenübung: 21.04.2008

Abgabe Hausübung: 28.04.2008

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 5 Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen, die

$$\begin{array}{ll} P(\{X_1 = 0\}) = 0.4 & P(\{X_2 = 0\}) = 0.5 \\ P(\{X_1 = 1\}) = 0.3 & P(\{X_2 = 1\}) = 0.2 \\ P(\{X_1 = 2\}) = 0.2 & P(\{X_2 = 2\}) = 0.1 \\ P(\{X_1 = 3\}) = 0.1 & P(\{X_2 = 3\}) = 0.1 \\ & P(\{X_2 = 4\}) = 0.1 \end{array}$$

erfüllen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(\{X_1 + X_2 = k\})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Mögliche Werte für $X_1 + X_2$:

$X_2 \| X_1$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6
4	4	5	6	7

Wegen der Unabhängigkeit von X_1 und X_2 ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion für $Y := X_1 + X_2$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(\{Y = k\})$	0.2	0.23	0.20	0.16	0.11	0.06	0.03	0.01

Für alle übrigen $k \in \mathbb{Z}$ gilt $P(\{Y = k\}) = 0$.

G 6 Beim Auszählen von Zellen in 50 Quadranten eines Hämazytometers ergaben sich die folgenden Werte:

1	2	2	2	4	4	4	5	5	5	2	1	2	2	7	6	7	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5	6	6	2	3	3	3	3	3	6	7	7	7	5	2	2	2	7	9	9

(i) Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion $F_n(\cdot; x_1, \ldots, x_{50})$.

(ii) Bestimmen Sie einen möglichst einfachen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ und darauf eine Zufallsvariable X', so dass für deren Verteilungsfunktion

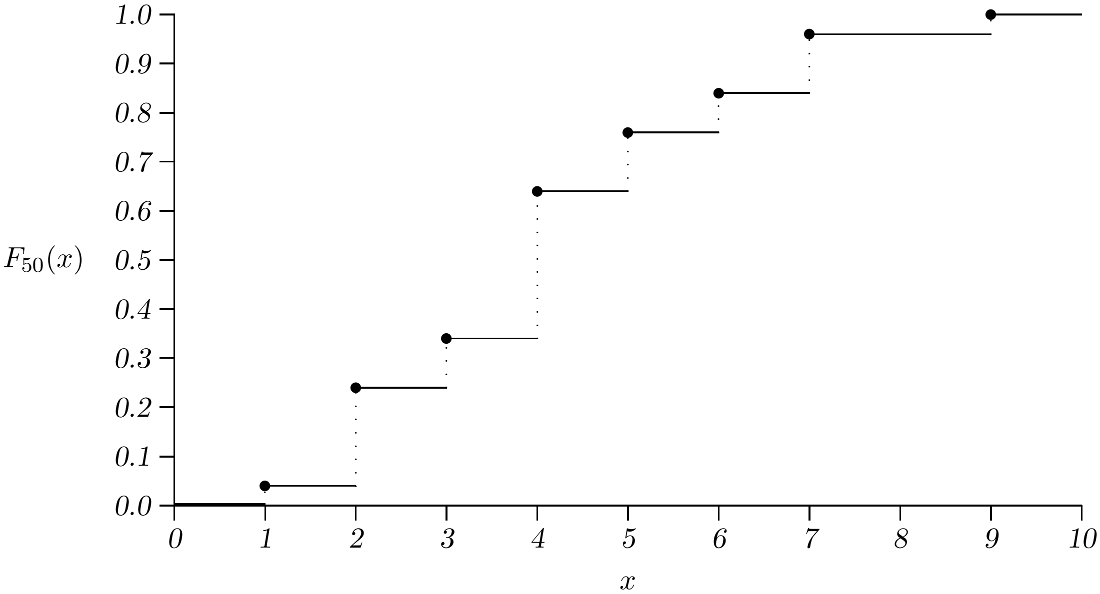
$$F_{X'} = F_n(\cdot; x_1, \ldots, x_{50})$$

gilt.

(i) Es ergibt sich zunächst die folgende Häufigkeitstabelle:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl der Zellen w_i	1	2	3	4	5	6	7	9
absolute Häufigkeit	2	10	5	15	6	4	6	2
relative Häufigkeit $p_{50}(w_i)$	0.04	0.2	0.1	0.3	0.12	0.08	0.12	0.04

Skizze der empirischen Verteilungsfunktion:



(ii)Hinter der empirischen Verteilungsfunktion stecken die relativen Häufigkeiten $\frac{h_n(x_j)}{n}$ der einzelnen beobachteten Realisierungen. Unsere Zufallsvariable X' hat demnach als Wertebereich gerade $\{x_1,\, x_2, \ldots, x_{50}\}$. Außerdem definieren wir:

$$F_n(x_{i:n}; x_1, \ldots, x_{50}) - F_n(x_{i-1:n;x_1,\ldots,x_{50}}) = y_i, \quad \forall i = 1, \ldots, 50,$$

wobei $x_{i:n}$ der i.-größte Wert unter den $x_1,\, x_2, \ldots, x_{50}$ ist und $F_n(x_{0:50}; x_1, \ldots, x_{50}) = 0$. Demnach gilt: $\sum_{i=1}^{50} y_i = 1$.
Unser Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ und die Zufallsvariable X' sehen demnach wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
&\Omega' = \{1, \ldots, n\}(\text{z.B.})\\
&\mathfrak{A}' \qquad \text{ist die } \sigma\text{-Algebra der Borelmengen}\\
&X' : \Omega' \longrightarrow \{x_1, x_2, \ldots, x_{50}\}, \quad \omega \longmapsto x_\omega\\
&P(\{\omega \in \Omega :\, X(\omega) = x_\omega\}) = y_\omega \qquad \omega = 1, \ldots, 50
\end{aligned}$$

oder: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $\mathfrak{A}$ und P wie oben, $X(\omega) = \omega$.