Einführung in die Stochastik
3. Übung
Gruppenübung: 14.04.2008
Abgabe Hausübung: 21.04.2008
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 3 Betrachten Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine Folge $(A_i)_{i\in J}$ in $\mathfrak{A}$. Beweisen Sie die folgende Äquivalenz:

(i) $(A_i)_{i\in J}$ ist unabhängig.

$\Longleftrightarrow$ (ii) Für alle endlichen, nichtleeren Mengen $J_1,\ J_2 \subseteq J$ mit $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ und $P(\cap_{j_2\in J_2} A_{j_2}) \neq 0$ gilt

$$P(\cap_{j_1\in J_1} A_{j_1} \,|\, \cap_{j_2\in J_2} A_{j_2}) = P(\cap_{j_1\in J_1} A_{j_1}).$$

"$\Rightarrow$"

$$\begin{aligned}
P(\cap_{j_1\in J_1} A_{j_1} \,|\, \cap_{j_2\in J_2} A_{j_2}) &= \frac{P(\cap_{j\in J_1\cup J_2} A_j)}{P(\cap_{j_2\in J_2} A_{j_2})} \\
&\overset{(i)}{=} \frac{\prod_{j\in J_1\cup J_2} P(A_j)}{\prod_{j_2\in J_2} P(A_{j_2})} \\
&= \frac{\prod_{j_1\in J_1} P(A_{j_1}) \cdot \prod_{j_2\in J_2} P(A_{j_2})}{\prod_{j_2\in J_2} P(A_{j_2})} \\
&= \prod_{j_1\in J_1} P(A_{j_1}) \\
&= P(\cap_{j_1\in J_1} A_{j_1})
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" *vollständige Induktion über* $n = |J|$:

Induktionsanfang: $n = 1:\quad P(A_j) = P(A_j)$

Induktionsschritt: Sei $|J| = n+1,\ j^* \in J$ *und* $J' = J \setminus \{j^*\}$

$$\begin{aligned}
P(\cap_{j\in J} A_j) &= P((\cap_{j\in J'} A_j) \cap A_{j^*}) \\
&= P(\cap_{j\in J'} A_j | A_{j^*}) \cdot P(A_{j^*}) \\
&\overset{(ii)}{=} P(\cap_{j\in J'} A_j) \cdot P(A_{j^*}) \\
&= \prod_{j\in J'} P(A_j) \cdot P(A_{j^*}) \\
&= \prod_{j\in J} P(A_j)
\end{aligned}$$

G 4 Betrachten Sie das Zufallsexperiment und den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum aus Beispiel I.1.15 (Dartscheibe).

(i) Definieren Sie Zufallsvariablen X und Y, welche die erste Koordinate bzw. den Winkel (in Polarkoordinaten) des Auftrittspunktes der Dartpfeiles beschreiben.

(ii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von X und Y.

Sei $r \in (0, \infty)$ *der Radius der Dartscheibe. Gemäß Beispiel I.1.15 wählen wir als Ergebnisraum*

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq r^2\}$$

Die Zufallsvariable sind dann definiert durch

$$X : \Omega \to \mathbb{R},\, X(\omega) = \omega_1, \qquad \omega \in \Omega$$

und

$$Y : \Omega \to \mathbb{R},\, Y(\omega) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) & \omega \in \Omega,\, \omega_1 > 0,\, \omega_2 \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) + \pi & \omega \in \Omega,\, \omega_1 < 0,\, \omega_2 \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) + \pi & \omega \in \Omega,\, \omega_1 < 0,\, \omega_2 < 0 \\ \arctan\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) + 2\pi & \omega \in \Omega,\, \omega_1 > 0,\, \omega_2 < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \omega_1 = 0,\, \omega_2 \geq 0 \\ 3\frac{\pi}{2} & \omega_1 = 0,\, \omega_2 < 0 \\ . \end{cases}$$

Wir erhalten

$$P(\{X \leq x\}) = \frac{1}{\pi r^2} \cdot 2 \int_{-r}^{x} \sqrt{r^2 - \omega_1^2} d\omega_1.$$

$$P(\{Y \leq \alpha\}) = \frac{\alpha}{2\pi}, \qquad \alpha \in (0, 2\pi].$$