

Einführung in die Stochastik

2. Übung

Gruppenübung: 07.04.2008

Abgabe Hausübung: 14.04.2008

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 1 In einem Experiment sollen Familien mit zwei Kindern hinsichtlich der Geschlechterkombinationen der zwei Kinder untersucht werden. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Kind, ein Mädchen bzw. ein Junge zu sein, jeweils gleich 0.5 ist.

Das Experiment besteht darin, eine Familie (mit zwei Kindern) zufällig auszuwählen.

- (i) Geben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum an, der diesem Zufallsexperiment zugrunde liegt!
- (ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie einen Jungen hat?

In einem weiteren Experiment werden nur Familien mit zwei Kindern betrachtet, von denen zumindest eines ein Junge ist.

- (iii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das andere Kind ein Junge ist?

In einem dritten Experiment (es werden wieder nur Familien mit zwei Kindern betrachtet), besuchen wir eine dieser Familien. Die Tür wird uns von einem Jungen geöffnet.

- (iv) Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass auch das andere Kind ein Junge ist? Überlegen Sie zuerst, wie sich der Ergebnisraum für das dritte Experiment im Vergleich zu den vorangegangenen ändert!

(i) mit den Abkürzungen J =Junge und M =Mädchen ergibt sich:

$$\Omega = \{JJ, JM, MJ, MM\}$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$$

P ist Gleichverteilung auf Ω

(ii)

$$P(\{JJ, JM, MJ\}) = P(JJ \cup JM \cup MJ) = P(JJ) + P(JM) + P(MJ) = \frac{3}{4}$$

(iii)

$$P(\{JJ\}|\{JJ, MJ, JM\}) = \frac{P(\{JJ\})}{P(\{JJ, JM, MJ\})} = \frac{1}{3}$$

(iv) Der Wahrscheinlichkeitsraum muss erweitert werden: Aus der Tatsache, dass uns ein Junge die Tür öffnet, können wir nämlich nicht ableiten, ob der Junge der ältere oder jüngere der beiden Geschwister ist. Unser neuer Ergebnisraum sieht demnach wie folgt aus:

$$\Omega = \{J_T J, J J_T, J_T M, J M_T, M_T J, M J_T, M_T M, M M_T\},$$

wobei J_T bzw. M_T der Junge bzw. das Mädchen ist, welcher/s die Tür öffnet.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P(\{J_T J, J J_T\}|\{J_T J, J J_T, J_T M, M J_T\}) = \frac{P(\{J_T J, J J_T\})}{P(\{J_T J, J J_T, J_T M, M J_T\})} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}$$

G 2 Sei \mathfrak{A} die Menge aller Teilmengen von $\Omega = \mathbb{N}$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P_n auf \mathfrak{A} sei definiert durch

$$P_n(A) = \frac{1}{n} \#\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n, k \in A\}, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Wenn der Grenzwert von $P_n(A)$ existiert, nennen wir

$$d(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A)$$

die *Dichte* von A . Mit \mathcal{D} bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von Ω , die eine Dichte besitzen.

Zeigen Sie, dass $\emptyset \in \mathcal{D}$, $\Omega \in \mathcal{D}$ und dass \mathcal{D} abgeschlossen ist unter der Bildung von Komplementen, Differenzen und von Vereinigungen endlich vieler disjunkter Mengen.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $P_n(\emptyset) = 0$. Daher gilt auch $d(\emptyset) = 0$ und $\emptyset \in \mathcal{D}$. Zudem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(\mathbb{N}) = \frac{1}{n} \#\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\} = \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

woraus unmittelbar (wegen $\Omega = \mathbb{N}$) die Aussagen $d(\Omega) = 1$ und $\Omega \in \mathcal{D}$ ableitbar sind.

Seien A und A^c zueinander komplementäre Teilmengen von \mathbb{N} . Es gilt

$$\begin{aligned} P_n(A) + P_n(A^c) &= \frac{1}{n} \#\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n, k \in A\} + \frac{1}{n} \#\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n, k \in A^c\} \\ &= \frac{1}{n} \#(\{k \in A : 1 \leq k \leq n\} \cup \{k \in A^c : 1 \leq k \leq n\}) = 1 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Existieren die Grenzwerte, dann folgt

$$d(A^c) = 1 - d(A)$$

und somit $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$.

Seien nun A_1, \dots, A_m disjunkte Mengen in \mathcal{D} , dann

$$\begin{aligned} P_n(A_1 \cup \dots \cup A_m) &= \frac{1}{n} \#((A_1 \cup \dots \cup A_m) \cap \{1, \dots, n\}) \\ &= \frac{1}{n} \#((A_1 \cap \{1, \dots, n\}) \cup \dots \cup (A_m \cap \{1, \dots, n\})) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{n} \#(A_k \cap \{1, \dots, n\}) = \sum_{k=1}^m P_n(A_k). \end{aligned}$$

Mit Grenzwertsätzen aus der Analysis folgt

$$d(A_1 \cup \dots \cup A_m) = \sum_{k=1}^m d(A_k).$$

Für die Differenzbildung: $A, B \in \mathcal{D}$, $B \subseteq A$. Dann A^c und B disjunkt und somit $A^c \cup B \in \mathcal{D}$ und $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c = A \setminus B \in \mathcal{D}$.