



Einführung in die Stochastik

14. Übung

Gruppenübung: 30.06.2008

Gruppenübung

G 24 Eine Apparatur füllt bestimmte Mengen (in g) eines pulverförmigen Medikaments ab. Es wird angenommen, daß diese Menge durch eine normalverteilte Zufallsvariable X mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2 beschrieben werden kann. Zehn Messungen ergaben ein empirisches Mittel von $\bar{x}_{10} = 19.6$ und eine empirische Varianz von $v_{10}(x) = 1.41$.

- (i) Geben Sie eine Realisierung des Konfidenzintervalls für μ zum Niveau $1 - \alpha = 0.9$ an.

Hinweis: $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 3854.3$

- (ii) Wie verändern sich die Intervallgrenzen des Konfidenzintervalls für μ zum Niveau $1 - \alpha = 0.9$, falls zusätzlich $\sigma^2 = 1$ bekannt ist?

G 25 Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R} =: \Theta$ und bekannter Varianz σ^2 . Wir betrachten ein Testproblem zur *einseitigen* Hypothese

$$\Theta_0 = \{\mu \in \Theta : \mu \geq \mu_0\}.$$

- (i) Geben Sie einen Verwerfungsbereich R_n an, der einen Signifikanztest zu einem gegebenen Niveau α definiert.
- (ii) Für eine gegebene Stichprobe von 20 unabhängigen $\mathbf{N}(\mu, 4)$ -verteilten Zufallsvariablen sei $\bar{x}_{20} = 11$. Testen Sie unter Verwendung von (i) die Hypothese

$$\Theta_0 = \{\mu \in \Theta : \mu \geq 12\}$$

für $\alpha = 0.01$.

G 26 Der Personalchef einer Bank möchte untersuchen, ob Männer und Frauen die gleiche Chance besitzen, die Aufnahmeprüfung zu bestehen. Für 36 zufällig ausgewählte Stellenbewerber, von denen 23 Männer waren, wurde das Ergebnis der Prüfung ermittelt. Es zeigte sich, dass genau 17 Bewerber die Prüfung bestanden, davon 7 Frauen. Wir möchten die Unabhängigkeit des Prüfungsergebnisses von der Geschlechtszugehörigkeit überprüfen.

- (i) Sei X die Anzahl der Männer, welche den Test bestehen. Es kann gezeigt werden, dass X unter der Annahme der Unabhängigkeit zwischen Prüfungsergebnis und Geschlechtszugehörigkeit hypergeometrisch verteilt ist. Bestimmen Sie für obige Realisierung die zugehörigen Parameter k , n_0 , n der hypergeometrischen Verteilung.
- (ii) Ausgehend von Ihrem Ergebnis in (i) bestimmen Sie einen Verwerfungsbereich für einen zweiseitigen Test der Unabhängigkeitsannahme (Prüfungsergebnis bzgl. Geschlechtszugehörigkeit) zum Niveau $\alpha = 0.05$. Zu welcher Entscheidung gelangen Sie anhand der oben gegebenen Stichprobe?

Hinweis:

- Die Verteilung von X ist durch folgende Tabelle gegeben (Aufgabenteil (i) muss trotzdem gelöst werden!):

x	0	1	2	3	4	5
$P(\{X = x\})$	0	0	0	0	$1.03 \cdot 10^{-6}$	$5.088 \cdot 10^{-5}$
x	6	7	8	9	10	11
$P(\{X = x\})$	$9.16 \cdot 10^{-4}$	$8.16 \cdot 10^{-3}$	0.041	0.122	0.228	0.270
x	12	13	14	15	16	17
$P(\{X = x\})$	0.232	0.095	0.027	$4.44 \cdot 10^{-3}$	$3.71 \cdot 10^{-4}$	$1.17 \cdot 10^{-5}$

- Bei diesem Test handelt es sich um einen exakten Test (die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Testgröße Werte im Ablehnungsbereich annimmt, lässt sich exakt bestimmen). In der Literatur wird er auch als *Fisher-Test* bezeichnet.