Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
A. Fromkorth
A. Janoschek
A. Keller

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

23.06.2008

Einführung in die Stochastik
13. Übung
Gruppenübung: 23./24.06.2008

Gruppenübung

G 21 Wir betrachten ein statistisches Experiment, gegeben durch $(\Omega, \mathfrak{A}, P^\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ mit P^ϑ und $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Realisierung von X.
Analog zum Vorgehen in Abschnitt VIII.2. definieren wir die *Likelihood-Funktion* $L_x(\vartheta)$ gemäß

$$L_x(\vartheta) = P^\vartheta(\{X = x\}).$$

(i) Es gelte $X_1 \sim \mathbf{P}(\lambda)$. Geben Sie die Likelihood-Funktion an.

(ii) Wir betrachten das Schätzproblem $\gamma(\lambda) = \lambda$. Überlegen Sie, wie sich mit Hilfe der Likelihood-Funktion eine Schätzfunktion $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $\gamma(\lambda)$ bestimmen läßt und berechnen Sie diese.

G 22 Sei g_n eine Schätzfunktion für γ und $R^\vartheta(g_n)$ bzw. $B^\vartheta(g_n)$ der Quadratmittelfehler bzw. Bias. Zeigen Sie:

(i) $R^\vartheta(g_n) = Var^\vartheta(g_n) + B^\vartheta(g_n)^2$

Wir betrachten nun ein statistisches Modell mit n unabhängigen auf $[0, \vartheta]$ gleichverteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Als Schätzfunktion für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$ wählen wir

$$g_n(x) = \max_{i=1,\ldots,n} \{x_i\}.$$

(ii) Zeigen Sie, daß $g_n(x)$ nicht erwartungstreu für γ ist und definieren Sie ein $c_n > 0$, so daß $h_n := c_n \cdot g_n$ eine erwartungstreue Schätzfunktion ist.

(iii) Verwenden Sie das arithmetische Mittel, um eine erwartungstreue Schätzfunktion m_n für γ zu konstruieren.
Berechnen Sie für g_n, h_n und m_n den Quadratmittelfehler und vergleichen Sie diese! Nutzen Sie Aussage (i)!

G 23 Vor einer Theaterkasse warten in einer Schlange 40 Personen, deren Bedienung im Mittel jeweils 50 Sekunden dauert. Es wird angenommen, daß sich die Bedienungszeiten durch unabhängige, identisch exponentialverteilte Zufallsvariablen beschreiben lassen. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle 40 Personen innerhalb von 35 Minuten bedient werden.

Hausübung

H 49 Für ein $\vartheta > 0$ seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch $\mathbf{U}(\vartheta, 3\vartheta)$-verteilte Zufallsvariablen.

(i) Bestimmen Sie den Bias und die Varianz der folgenden Schätzfunktion für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$:

$$g_n(x) = \overline{x}_n/2.$$

(ii) Ist die Folge $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ stark konsistent?

(iii) Ist die Schätzfunktion

$$h_n(x) = (g_n(x))^2 = \frac{1}{4n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2$$

erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta^2$? Modifizieren Sie sie gegebenenfalls so, daß sich eine erwartungstreue Schätzfunktion ergibt.

H 50 Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt wie X mit

$$P^\vartheta(\{X = 1\}) = \vartheta, \quad P^\vartheta(\{X = -1\}) = P^\vartheta(\{X = 0\}) = P^\vartheta(\{X = 2\}) = \frac{1-\vartheta}{3},$$

wobei $0 < \vartheta < 1$ der zu schätzende Parameter sei.

(i) Ist die Schätzfunktion

$$g_n(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)$$

erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$?

(ii) Betrachten Sie die Schätzfunktion

$$h_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{1\}}(x_i),$$

also die relative Häufigkeit von Einsen in der Stichprobe. Ist diese Schätzfunktion erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$?

(iii) Welche der beiden Schätzfunktionen würden Sie vorziehen?

(iv) Berechnen Sie für g_n und h_n jeweils den konkreten Schätzwert für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$, falls 20 Wiederholungen des Zufallsexperiments 5 Nullen, 8 Einsen und 4 Zweien ergeben haben.

H 51 Wir betrachten eine Folge $X_1, \ldots, X_n$ von iid Zufallsvariablen mit

$$X_1 \sim \mathbf{U}([\vartheta - 1/2, \vartheta + 1/2])\,,$$

mit $\vartheta \in \Theta = \mathbb{R}$ sowie die Schätzfunktion

$$g_n(x) = \frac{\max\{x_1, \ldots, x_n\} + \min\{x_1, \ldots, x_n\}}{2}$$

für $E^\vartheta(X_1)$.

Zeigen Sie, daß g_n erwartungstreu ist und daß gilt

$$\forall \vartheta \in \Theta :\ R^\vartheta(g_n) < R^\vartheta(\bar{X}_n).$$

Hinweis: Für $Y := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $Z := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ gilt:

$$Var(Y) = Var(Z) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$