Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
A. Fromkorth
A. Janoschek
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

16.06.2008

Einführung in die Stochastik

12. Übung
Gruppenübung: 16./17.06.2008
Abgabe Hausübung: 23./24.06.2008

Gruppenübung

G 19 Mit X_n wird die Anzahl der geworfenen 6 in einer Serie von n unabhängigen Würfen mit einem Würfel bezeichnet.

(i) Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt X_n?

(ii) Für $\varepsilon = 0.01$ bestimme man eine Anzahl n_0 von unabhängigen Würfen, so daß

$$P\left(\left\{\left|\frac{X_{n_0}}{n_0} - \frac{1}{6}\right| \leq 0.01\right\}\right) \geq 0.5$$

gilt, sowohl mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung, der Hoeffdingschen Ungleichung (Vgl. Vorlesung Satz VII.1.5) als auch approximativ mittels des Zentralen Grenzwertsatzes.

G 20 Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen mit

$$P(\{X_1 = 18\}) = 0.2, \qquad P(\{X_1 = 13\}) = 0.8.$$

Zeigen Sie:

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = 14\right\}\right) = 1.$$

Hausübung

H 49 Beweisen Sie die folgende Aussage:
Sei $(X_n)_n$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{d} X$ und seien F_{X_n} bzw. F_X die zugehörigen Verteilungsfunktionen. Ist F_X stetig, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{X_n}(x) - F_X(x)| = 0,$$

d.h. F_{X_n} konvergiert gleichmäßig gegen F_X.

Hinweis: Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind gleichmäßig stetig.

H 50 Die Zufallsvariable X beschreibe das Alter einer zufällig aus der Gesamtbevölkerung der Bundesrepublik ausgewählten Person. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und verteilt wie X. Sie beschreiben eine Zufallsstichprobe aus der Altersverteilung. Man möchte das Durchschnittsalter der Gesamtbevölkerung durch das Stichprobenmittel $\bar{X}_n$ so schätzen, dass man mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.95 ein Ergebnis erhält, das nicht um mehr als ein Jahr vom wahren Wert abweicht.
Mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes bestimme man einen möglichst kleinen Wert n, der dafür ausreicht. Man nehme an, dass die Standardabweichung $\sigma = \frac{1000}{49}$ von X bekannt ist.

H 51 (vgl. Satz VII.3.17)

(i) Seien $a, b, \mu \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $\sigma \in]0, \infty[$. Zeigen Sie: Gilt $X \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$, so folgt $aX + b \sim \mathbf{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

(ii) Seien $X_1 \sim \mathbf{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathbf{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ zwei unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen. Welche Verteilung besitzt die Summe $X_1 + X_2$?
Wie lässt sich der Beweis verallgemeinern, um Satz VII.3.17(ii) zu beweisen (Sie sollen diesen Beweis nicht durchführen, sondern nur die Methode nennen)?

H 52 Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge von Zufallsvariablen und mit $E(X_1) = 0$ und $Var(X_1) = 1$. Wir setzen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Ferner sei Y eine Zufallsvariable, die stets den Wert 0 annimmt. Zeigen Sie, daß

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{d} Y.$$